O estymacji parametrów wielowymiarowych rozkładów α–stabilnych subgaussowskich

Piotr Szymański

Wyższa Szkoła Gospodarki
w Bydgoszczy
Instytut Informatyki Stosowanej

Wisła, 7–11 grudnia 2009

Definicja

Rozkład wektora losowego $X = (X_1, \ldots, X_d)$ nazywamy α-stabilnym, jeżeli dla dowolnego $n \geqslant 2$ istnieje $\alpha \in (0, 2]$ i wektor $a^{(n)}$ takie, że

$$X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + a^{(n)},$$

gdzie $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ są niezależnymi kopiami X.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-**stabilny subgaussowski**, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ *- rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ *– macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W} Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos \pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0, \Sigma)$, W i Z niezależne.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-***stabilny subgaussowski***, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ - *rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ – *macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W}Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos \pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0, \Sigma)$, W i Z niezależne.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-**stabilny subgaussowski**, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ *- rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ *– macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W} Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos \pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0, \Sigma)$, W i Z niezależne.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-**stabilny subgaussowski**, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2\mathbf{1}$ *- rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\dots,d}$ *– macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W}Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos\pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0,\Sigma)$, W i Z niezależne.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-**stabilny subgaussowski**, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ *- rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ *– macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W} Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos \pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0,\Sigma)$, W i Z niezależne.

Definicja

*Wektor losowy X ma rozkład α-**stabilny** **subgaussowski**, jeżeli jego funkcja charakterystyczna ma postać*

$$\widehat{s}_{d,\alpha}(t) = \exp(-(t'\Sigma t)^{\frac{\alpha}{2}}), t \in \boldsymbol{R}^d, \alpha \in (0,2), \Sigma \succ 0.$$

- *Oznaczenie $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$.*
- $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ *- rozkład sferycznie niezmienniczy.*
- $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\ldots,d}$ *– macierz dyspersji.*

Uwaga

Wektor $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ ma przedstawienie

$$X = \sqrt{W} Z,$$

gdzie $W \sim S_{\alpha/2}(2(\cos \pi\alpha/2)^{2/\alpha}, 1, 0)$ oraz $Z \sim N(0, \Sigma)$, W i Z niezależne.

Poruszane problemy

- Nie istnieje jawna postać funkcji gęstości $s_{d,\alpha,\Sigma}(x), x \in \boldsymbol{R}^d$.
- Funkcję gęstości można przedstawić jako

$$s_{d,\alpha,\Sigma}(x) = |\det \Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2} x|), x \in \boldsymbol{R}^d.$$

- Funkcja $q_{d,\alpha}(r)$ jest znana z przypadku sferycznie niezmienniczego (Uwaga $\alpha \in [1,2]$).
- Problem główny: estymacja α i Σ.

Poruszane problemy

- Nie istnieje jawna postać funkcji gęstości $s_{d,\alpha,\Sigma}(x), x \in \boldsymbol{R}^d$.
- Funkcję gęstości można przedstawić jako

$$s_{d,\alpha,\Sigma}(x) = |\det \Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2} x|), x \in \boldsymbol{R}^d.$$

- Funkcja $q_{d,\alpha}(r)$ jest znana z przypadku sferycznie niezmienniczego (Uwaga $\alpha \in [1, 2]$).
- Problem główny: estymacja α i Σ.

Poruszane problemy

- Nie istnieje jawna postać funkcji gęstości $s_{d,\alpha,\Sigma}(x), x \in \boldsymbol{R}^d$.
- Funkcję gęstości można przedstawić jako

$$s_{d,\alpha,\Sigma}(x) = |\det \Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2}x|), x \in \boldsymbol{R}^d.$$

- Funkcja $q_{d,\alpha}(r)$ jest znana z przypadku sferycznie niezmienniczego (Uwaga $\alpha \in [1, 2]$).
- Problem główny: estymacja α i Σ.

Poruszane problemy

- Nie istnieje jawna postać funkcji gęstości $s_{d,\alpha,\Sigma}(x), x \in \boldsymbol{R}^d$.
- Funkcję gęstości można przedstawić jako

$$s_{d,\alpha,\Sigma}(x) = |\det \Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2}x|), x \in \boldsymbol{R}^d.$$

- Funkcja $q_{d,\alpha}(r)$ jest znana z przypadku sferycznie niezmienniczego (Uwaga $\alpha \in [1, 2]$).
- Problem główny: estymacja α i Σ.

Próba

Przez $\underline{X} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, gdzie $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_d^{(i)})'$, $i = 1, \ldots, n$, oznaczamy próbę z rozkładu $S_{d,\alpha}(\Sigma)$.

Lemat

Niech $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ oraz $t \in S^{d-1}$ jest dowolnym wektorem. Wtedy $\langle t, X \rangle \sim S_\alpha(\sigma(t))$, gdzie $\sigma(t) = (t'\Sigma t)^{1/2}$.

Wniosek

Niech $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)' \in S^{d-1}, i = 1, \ldots, d$. Wtedy

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma^2(e_i + e_j) - \sigma^2(e_i - e_j)}{4}, i, j = 1, \ldots, d.$$

Próba

Przez $\underline{X} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, gdzie $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_d^{(i)})'$, $i = 1, \ldots, n$, oznaczamy próbę z rozkładu $S_{d,\alpha}(\Sigma)$.

Lemat

Niech $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ oraz $t \in S^{d-1}$ jest dowolnym wektorem. Wtedy $\langle t, X \rangle \sim S_\alpha(\sigma(t))$, gdzie $\sigma(t) = (t'\Sigma t)^{1/2}$.

Wniosek

Niech $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)' \in S^{d-1}$, $i = 1, \ldots, d$. Wtedy

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma^2(e_i + e_j) - \sigma^2(e_i - e_j)}{4}, i, j = 1, \ldots, d.$$

Próba

Przez $\underline{X} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, gdzie $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_d^{(i)})'$, $i = 1, \ldots, n$, oznaczamy próbę z rozkładu $S_{d,\alpha}(\Sigma)$.

Lemat

Niech $X \sim S_{d,\alpha}(\Sigma)$ oraz $t \in S^{d-1}$ jest dowolnym wektorem. Wtedy $\langle t, X \rangle \sim S_\alpha(\sigma(t))$, gdzie $\sigma(t) = (t'\Sigma t)^{1/2}$.

Wniosek

Niech $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)' \in S^{d-1}, i = 1, \ldots, d$. Wtedy

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma^2(e_i + e_j) - \sigma^2(e_i - e_j)}{4}, i, j = 1, \ldots, d.$$

Lemat

Estymator dla $\sigma(t)$ ma postać

$$\widehat{\sigma}(t) = c(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |t' x^{(k)}|^{1/n},$$

gdzie

$$c(\alpha, n) = \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \Gamma(1/n) \Gamma(1 - 1/(n\alpha)) \right)^n.$$

Wniosek

Estymator dla σ_{ij} ma postać

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}^2(e_i + e_j) - \widehat{\sigma}^2(e_i - e_j)}{4}.$$

Uwaga

Estymator $\widehat{\sigma}_{ij}$ rzadko zwraca macierz dodatnio określoną.

Lemat

Estymator dla $\sigma(t)$ ma postać

$$\widehat{\sigma}(t) = c(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |t' x^{(k)}|^{1/n},$$

gdzie

$$c(\alpha, n) = \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \Gamma(1/n) \Gamma(1 - 1/(n\alpha)) \right)^n .$$

Wniosek

Estymator dla σ_{ij} ma postać

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}^2(e_i + e_j) - \widehat{\sigma}^2(e_i - e_j)}{4}.$$

Uwaga

Estymator $\widehat{\sigma}_{ij}$ rzadko zwraca macierz dodatnio określoną.

Lemat

Estymator dla $\sigma(t)$ ma postać

$$\widehat{\sigma}(t) = c(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |t' x^{(k)}|^{1/n},$$

gdzie

$$c(\alpha, n) = \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \Gamma(1/n) \Gamma(1 - 1/(n\alpha)) \right)^{n}.$$

Wniosek

Estymator dla σ_{ij} ma postać

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}^2(e_i + e_j) - \widehat{\sigma}^2(e_i - e_j)}{4}.$$

Uwaga

Estymator $\widehat{\sigma}_{ij}$ rzadko zwraca macierz dodatnio określoną.

Konstrukcja

- Wygenerować próbę $\underline{U} = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$ złożoną z wektorów losowych o rozkładzie jednostajnym na sferze S^{d-1}.
- Dla $k = 1, \ldots, n$ na podstawie próby $(\langle u^{(k)}, x^{(1)} \rangle, \ldots, \langle u^{(k)}, x^{(n)} \rangle)'$ oszacować α za pomocą estymatora jednowymiarowego $\widehat{\alpha}_k$.
- Obliczyć $\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\alpha}_k$.

Konstrukcja

- Wygenerować próbę $\underline{U} = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$ złożoną z wektorów losowych o rozkładzie jednostajnym na sferze S^{d-1}.
- Dla $k = 1, \ldots, n$ na podstawie próby $(\langle u^{(k)}, x^{(1)} \rangle, \ldots, \langle u^{(k)}, x^{(n)} \rangle)'$ oszacować α za pomocą estymatora jednowymiarowego $\widehat{\alpha}_k$.
- Obliczyć $\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\alpha}_k$.

Konstrukcja

- Wygenerować próbę $\underline{U} = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$ złożoną z wektorów losowych o rozkładzie jednostajnym na sferze S^{d-1}.
- Dla $k = 1, \ldots, n$ na podstawie próby $(\langle u^{(k)}, x^{(1)} \rangle, \ldots, \langle u^{(k)}, x^{(n)} \rangle)'$ oszacować α za pomocą estymatora jednowymiarowego $\widehat{\alpha}_k$.
- Obliczyć $\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\alpha}_k$.

Specjalna postać macierzy Σ

- W dalszej części rozważamy specjalną postać macierzy dyspersji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_d \end{bmatrix}$$

- Dla skrócenia zapisu używać będziemy oznaczenia

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d).$$

- Estymator dla $\sigma_i, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_i = c^{-2}(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

Specjalna postać macierzy Σ

- W dalszej części rozważamy specjalną postać macierzy dyspersji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_d \end{bmatrix}$$

- Dla skrócenia zapisu używać będziemy oznaczenia

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d).$$

- Estymator dla $\sigma_i, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_i = c^{-2}(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

Specjalna postać macierzy Σ

- W dalszej części rozważamy specjalną postać macierzy dyspersji

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_d \end{bmatrix}$$

- Dla skrócenia zapisu używać będziemy oznaczenia

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d).$$

- Estymator dla $\sigma_i, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_i = c^{-2}(\alpha, n) \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

Własności estymatora $\widehat{\sigma}_i$

Estymator $\widehat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, d$, ma przedstawienie

$$\widehat{\sigma}_i = \sigma^2_{NZ}(x_i^{(\cdot)}),$$

gdzie σ_{NZ} jest nieobciążonym estymatorem Zolotareva dla parametru skali rozkładu sferycznie niezmienniczego oraz posiada własności

- $E\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i \frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} > \sigma_i^2$,
- $Var\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i^2 \frac{f^2(n/2,\alpha) - f^2(n,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)}$,
- $R\ (\widehat{\sigma}_i) = \sigma_i^2 \left[\frac{f^2(n/2,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)} - 2\frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} + 1 \right]$,
- $E\ \widehat{\sigma}_i^k = \sigma_i^k (f(n/k,\alpha)/f(2n,\alpha))^k$,
  gdzie $f(z,\alpha) = \frac{4}{\exp(2C_E(1/\alpha - 1))} \left(\frac{\Gamma(1-2/(z\alpha))\Gamma(1/2+1/z)}{\Gamma(1-1/z)\sqrt{\pi}} \right)$.

Własności estymatora $\widehat{\sigma}_i$

Estymator $\widehat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, d$, ma przedstawienie

$$\widehat{\sigma}_i = \sigma^2_{NZ}(x_i^{(\cdot)}),$$

gdzie σ_{NZ} jest nieobciążonym estymatorem Zolotareva dla parametru skali rozkładu sferycznie niezmienniczego oraz posiada własności

- $E\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i \frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} > \sigma_i^2$,
- $Var\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i^2 \frac{f^2(n/2,\alpha) - f^2(n,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)}$,
- $R\ (\widehat{\sigma}_i) = \sigma_i^2 \left[\frac{f^2(n/2,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)} - 2\frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} + 1 \right]$,
- $E\ \widehat{\sigma}_i^k = \sigma_i^k (f(n/k,\alpha)/f(2n,\alpha))^k$,
  gdzie $f(z,\alpha) = \frac{4}{\exp(2C_E(1/\alpha - 1))} \left(\frac{\Gamma(1-2/(z\alpha))\Gamma(1/2+1/z)}{\Gamma(1-1/z)\sqrt{\pi}} \right)$.

Własności estymatora $\widehat{\sigma}_i$

Estymator $\widehat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, d$, ma przedstawienie

$$\widehat{\sigma}_i = \sigma^2_{NZ}(x_i^{(\cdot)}),$$

gdzie σ_{NZ} jest nieobciążonym estymatorem Zolotareva dla parametru skali rozkładu sferycznie niezmienniczego oraz posiada własności

- $E\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i \frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} > \sigma_i^2$,
- $Var\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i^2 \frac{f^2(n/2,\alpha) - f^2(n,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)}$,
- $R\ (\widehat{\sigma}_i) = \sigma_i^2 \left[\frac{f^2(n/2,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)} - 2\frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} + 1 \right]$,
- $E\ \widehat{\sigma}_i^k = \sigma_i^k (f(n/k,\alpha)/f(2n,\alpha))^k$,
  gdzie $f(z,\alpha) = \frac{4}{\exp(2C_E(1/\alpha - 1))} \left(\frac{\Gamma(1-2/(z\alpha))\Gamma(1/2+1/z)}{\Gamma(1-1/z)\sqrt{\pi}} \right)$.

Własności estymatora $\widehat{\sigma}_i$

Estymator $\widehat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, d$, ma przedstawienie

$$\widehat{\sigma}_i = \sigma^2_{NZ}(x_i^{(\cdot)}),$$

gdzie σ_{NZ} jest nieobciążonym estymatorem Zolotareva dla parametru skali rozkładu sferycznie niezmienniczego oraz posiada własności

- $E\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i \frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} > \sigma_i^2$,
- $Var\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i^2 \frac{f^2(n/2,\alpha) - f^2(n,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)}$,
- $R\ (\widehat{\sigma}_i) = \sigma_i^2 \left[\frac{f^2(n/2,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)} - 2\frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} + 1 \right]$,
- $E\ \widehat{\sigma}_i^k = \sigma_i^k (f(n/k,\alpha)/f(2n,\alpha))^k$,
  gdzie $f(z,\alpha) = \frac{4}{\exp(2C_E(1/\alpha - 1))} \left(\frac{\Gamma(1-2/(z\alpha))\Gamma(1/2+1/z)}{\Gamma(1-1/z)\sqrt{\pi}} \right)$.

Własności estymatora $\widehat{\sigma}_i$

Estymator $\widehat{\sigma}_i$, $i = 1, \ldots, d$, ma przedstawienie

$$\widehat{\sigma}_i = \sigma^2_{NZ}(x_i^{(\cdot)}),$$

gdzie σ_{NZ} jest nieobciążonym estymatorem Zolotareva dla parametru skali rozkładu sferycznie niezmienniczego oraz posiada własności

- $E\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i \frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} > \sigma_i^2$,
- $Var\ \widehat{\sigma}_i = \sigma_i^2 \frac{f^2(n/2,\alpha) - f^2(n,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)}$,
- $R\ (\widehat{\sigma}_i) = \sigma_i^2 \left[\frac{f^2(n/2,\alpha)}{f^2(2n,\alpha)} - 2\frac{f(n,\alpha)}{f(2n,\alpha)} + 1 \right]$,
- $E\ \widehat{\sigma}_i^k = \sigma_i^k (f(n/k,\alpha)/f(2n,\alpha))^k$,
  gdzie $f(z,\alpha) = \frac{4}{\exp(2C_E(1/\alpha - 1))} \left(\frac{\Gamma(1-2/(z\alpha))\Gamma(1/2+1/z)}{\Gamma(1-1/z)\sqrt{\pi}} \right)$.

Estymator dla α

- Niech $\Sigma_0 = c^2(\alpha, n)\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{0d} \end{bmatrix}$.
- Estymator dla $\sigma_{0i}, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_{0i} = \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

- Tworzymy nową próbę $\underline{Z} = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$, gdzie $z^{(j)} = \Sigma_0^{-1/2} x^{(j)}, j = 1, \dots, n$.

Estymator dla α

- Niech $\Sigma_0 = c^2(\alpha, n)\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{0d} \end{bmatrix}$.
- Estymator dla $\sigma_{0i}, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_{0i} = \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

- Tworzymy nową próbę $\underline{Z} = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$, gdzie $z^{(j)} = \Sigma_0^{-1/2} x^{(j)}, j = 1, \dots, n$.

Estymator dla α

- Niech $\Sigma_0 = c^2(\alpha, n)\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{0d} \end{bmatrix}$.
- Estymator dla $\sigma_{0i}, i = 1, \dots, d$ ma wtedy postać

$$\widehat{\sigma}_{0i} = \prod_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}|^{2/n}.$$

- Tworzymy nową próbę $\underline{Z} = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$, gdzie $z^{(j)} = \Sigma_0^{-1/2} x^{(j)}, j = 1, \dots, n$.

Uwaga

Wektor losowy $Z = \Sigma_0^{-1/2} X$ ma rozkład α–stabilny sferycznie niezmienniczy z indeksem α.

Estymator dla α

Niech $y_i = \ln|z^{(i)}|, i = 1, \ldots, n$ oraz $s_y^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$.

Wielowymiarowy estymator Zolotareva dla indeksu α ma postać

$$\alpha_Z^d = \frac{1}{\sqrt{\max\left\{\frac{1}{4}, \frac{6}{\pi^2} s_y^2 + B_d\right\}}},$$

gdzie

$$B_d = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2} \psi^{'}(d/2).$$

Uwaga

Wektor losowy $Z = \Sigma_0^{-1/2} X$ ma rozkład α–stabilny sferycznie niezmienniczy z indeksem α.

Estymator dla α

Niech $y_i = \ln |z^{(i)}|, i = 1, \ldots, n$ oraz $s_y^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$.
Wielowymiarowy estymator Zolotareva dla indeksu α ma postać

$$\alpha_Z^d = \frac{1}{\sqrt{\max\left\{\frac{1}{4}, \frac{6}{\pi^2} s_y^2 + B_d\right\}}},$$

gdzie

$$B_d = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2} \psi^{'}(d/2).$$

Wprowadzenie

- Oznaczenie $\theta = (\alpha, \sigma) \in [1,2] \times \boldsymbol{R}_+^d$.
- Metoda największej wiarygodności oparta jest na poszukiwaniu

$$\theta_{NW} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathsf{s}_\theta(\underline{X}),$$

gdzie $\mathsf{s}_\theta(\underline{X}) = \prod_{j=1}^{n} |\det \Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2} x|)$ jest funkcją wiarygodności,

- W miejsce $\mathsf{s}_\theta(\underline{X})$ możemy rozważać logarytm wiarygodności

$$L(\theta, \underline{X}) = \ln \mathsf{s}_\theta(\underline{X}) = -n \sum_{j=1}^{d} \ln \sigma_j + \sum_{k=1}^{n} \ln q_{d,\alpha}(r_k),$$

gdzie $r_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j^{(k)})^2 / \sigma_j}$, ponieważ

$$\arg\max_{\theta \in \Theta} \mathsf{s}_\theta(\underline{X}) = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \underline{X}).$$

.

Wprowadzenie

- Oznaczenie $\theta = (\alpha, \sigma) \in [1, 2] \times \boldsymbol{R}_+^d$.
- Metoda największej wiarygodności oparta jest na poszukiwaniu

$$\theta_{NW} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X}),$$

gdzie $\mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = \prod_{j=1}^{n} |\det\Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2}x|)$ jest funkcją wiarygodności,

- W miejsce $\mathbf{s}_\theta(\underline{X})$ możemy rozważać logarytm wiarygodności

$$L(\theta, \underline{X}) = \ln \mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = -n\sum_{j=1}^{d} \ln\sigma_j + \sum_{k=1}^{n} \ln q_{d,\alpha}(r_k),$$

gdzie $r_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j^{(k)})^2/\sigma_j}$, ponieważ

$$\arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta, \underline{X}).$$

.

Wprowadzenie

- Oznaczenie $\theta = (\alpha, \sigma) \in [1, 2] \times \boldsymbol{R}_+^d$.
- Metoda największej wiarygodności oparta jest na poszukiwaniu

$$\theta_{NW} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X}),$$

gdzie $\mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = \prod_{j=1}^{n} |\det\Sigma|^{-1/2} q_{d,\alpha}(|\Sigma^{-1/2}x|)$ jest funkcją wiarygodności,

- W miejsce $\mathbf{s}_\theta(\underline{X})$ możemy rozważać logarytm wiarygodności

$$L(\theta, \underline{X}) = \ln \mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = -n\sum_{j=1}^{d} \ln\sigma_j + \sum_{k=1}^{n} \ln q_{d,\alpha}(r_k),$$

gdzie $r_k = \sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j^{(k)})^2/\sigma_j}$, ponieważ

$$\arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X}) = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta, \underline{X}).$$

.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\bigtriangledown_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}L(\theta), \frac{\partial}{\partial\sigma}L(\theta)\right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\bigtriangledown_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\bigtriangledown_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} L(\theta), \frac{\partial}{\partial \sigma} L(\theta) \right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\bigtriangledown_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\bigtriangledown_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}L(\theta), \frac{\partial}{\partial\sigma}L(\theta)\right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\bigtriangledown_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\nabla_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} L(\theta), \frac{\partial}{\partial\sigma} L(\theta)\right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\nabla_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\bigtriangledown_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} L(\theta), \frac{\partial}{\partial\sigma} L(\theta)\right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\bigtriangledown_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta\in\Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Wprowadzenie

- Gradient logarytmu wiarygodności oznaczamy przez

$$\bigtriangledown_L(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} L(\theta), \frac{\partial}{\partial \sigma} L(\theta) \right).$$

- Równaniem wiarygodności nazywamy

$$\bigtriangledown_L(\theta) = 0.$$

- Nie znamy mocy zbioru $\{\theta : \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathbf{s}_\theta(\underline{X})\}$.
- Zamiast poszukiwać θ_{NW} rozwiązujemy równanie wiarygodności zmodyfikowaną metodą Newtona, tworząc θ_{ENW}.
- Jako punkt startowy proponujemy $\theta_0 = ([\alpha_Z^d]_{1,2}, \widehat{\sigma})$.
- Zamiast Hessianu $L(\theta)$ użyjemy macierzy informacji Fishera $I(\theta)$.

Definicja estymatora

Jenokrokowy ENW–estymator

$$\theta_{ENW} = ([\theta_{ENW}(\alpha)]_{1,2}, [\theta_{ENW}(\sigma)]_{0,\infty}),$$

gdzie

$$(\theta_{ENW}\alpha), \theta_{ENW}(\sigma)) = \theta_0 + \frac{1}{n} \bigtriangledown_L (\theta_0) I(\theta_0)^{-1}$$

oraz $I(\theta)$ to macierz informacji Fishera.

- Kring S., Rachev S. T., Höchstötter M., Fabozzi F. J., *Estimation of α-Stable Sub-Gaussian Distributions for Asset Returns*, Risk Assessment Decisions in Banking and Finance, Physica-Verlag Springer, 2008
- Nolan J. P. , *Multivariate stable densities and distribution functions: general and elliptical case*, Deutsche Bundesbank's 2005 Annual Fall Conference, 2005.
- Szymański P., *Estymacja parametrów wielowymiarowych rozkładów α–stabilnych sferycznie niezmienniczych*, Rozprawa doktorska, 2008.