Bootstrapowe predykcyjne przedziały ufności w modelach heteroskedastycznych szeregów czasowych.

Grzegorz Chłapiński
grzegorz.chlapinski@pwr.wroc.pl
Roman Rózański
roman.rozanski@pwr.wroc.pl

Instytut Matematyki i Informatyki
Politechniki Wrocławskiej

5 grudnia 2009

Opis modelu

Załóżmy że $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest całkowicie niedeterministycznym, stacjonarnym drugiego rzędu szeregiem czasowym o wartości oczekiwanej równej zero. Na mocy twierdzenia Wolda otrzymujemy, że

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1,$$

gdzie $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, a $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest białym szumem (nieskorelowany ciąg zmiennych losowych o wartości oczekiwanej równej zero i skończonej wariancji).
Ponadto, zakładamy także, że proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest procesem odwracalnym, czyli z modelu $AR(\infty)$

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j X_{t-j} + \epsilon_t, \quad \phi_0 = 1,$$

gdzie $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$.

Opis modelu, c. d.

Przyjmijmy dalej, że biały szum $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest procesem z modelu $GARCH(r,s)$ to znaczy

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i \sigma_{t-i}^2, \end{aligned}$$

gdzie $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem i. i. d. o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji $E\xi^2 = 1$.
Oczywiście, musimy założyć, że spełnione są odpowiednie warunki na współczynniki $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s$ gwarantujące stacjonarność drugiego rzędu procesu $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Takim warunkiem wystarczającym jest, aby

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i < 1, \qquad \alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0.$$

Opis modelu, c. d.

Następujące twierdzenie (Berkes, Horvath, Kokoszka, 2003) daje nam możliwość przedstawienia szeregu $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ w postaci modelu $ARCH(\infty)$.

Twierdzenie

Jeśli $E\log\sigma_0^2 < \infty$, *to*

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \epsilon_{t-i}^2, \quad \textit{dla każdego } t,$$

z prawdopodobieństwem 1.

W dalszym ciągu, w schemacie bootstrapu sitowego będziemy aproksymować model $GARCH(r,s)$ ciągiem modeli $ARCH(q)$, gdzie $q = q(n)$ jest ciągiem zbieżnym do ∞ przy $n \to \infty$.

Założenia

Niech $\mathcal{F}_t$ oznacza σ-algebrę generowaną przez $\{\epsilon_i\}_{i=-\infty}^{t}$.

(A1') $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$, $\psi_0 = 1, t \in \mathbb{Z}$, gdzie $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem stacjonarnym i ergodycznym oraz $E\left(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0$, $E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 < \infty$, $E|\epsilon_t|^s < \infty$ dla pewnego $s \geqslant 4$.
(A2) $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$ jest oddzielona od zera dla $|z| \leqslant 1$ oraz $\sum_{j=0}^{\infty} j^r |\psi_j| < \infty$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$.
(B) Ciąg $p = p(n) \to \infty$, $p(n) = o\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2r+2}}\right)$, $\widehat{\Phi}_p = [\widehat{\phi}_{1,n}, ..., \widehat{\phi}_{p,n}]^T$ wektor estymatorów parametrów modelu $AR(p)$ będących rozwiązaniami równań Yule-Walkera

$$\widehat{\Gamma}_p \widehat{\Phi}_p = \widehat{\gamma}_p,$$

gdzie $\widehat{\Gamma}_p = [\widehat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1}^{p}$, $\widehat{\gamma}_p = [\widehat{\gamma}(1), ..., \widehat{\gamma}(p)]^T$, a $\widehat{\gamma}(\cdot)$ jest próbkową funkcją autokowariancji

$$\widehat{\gamma}(j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} (X_t - \overline{X}_n)(X_{t+j} - \overline{X}_n).$$

Założenia, c. d.

(G1) $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ jest ciągiem i. i. d. o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji $E\xi_0^2 = 1$ oraz $E\xi_0^8 < \infty$.
(G2) Współczynniki $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s$ modelu $GARCH(r, s)$ szeregu czasowego $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i < 1, \qquad \alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0.$$

(G3) $E\epsilon_t^8 < \infty$.
W pacy (Basrak B., Davis R.A., Mikosch T. (2002)) został podany warunek wystarczający aby bylo spełnione założenie G3.

Założenia, c. d.

(G4) $\sum_{j=1}^{\infty} jc_j < \infty$.

(G5) $q = q(n)$, $q = o((n/\log n)^{1/2})$ oraz $\widehat{C}_q = (\widehat{c}_{1,n}, ..., \widehat{c}_{q,n})^T$ spełniają empiryczne równania Yule-Walkera, tzn.

$$\widehat{\Gamma}_{\widehat{\epsilon^2},q}\widehat{C}_q = \widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2},q},$$

gdzie $\widehat{\Gamma}_{\widehat{\epsilon^2},q} = \left[\widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2}}(i-j)\right]_{i,j=1}^{q}$, $\widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2},q} = \left(\widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2}}(1), ..., \widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2}}(q)\right)^T$, a $\widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2}}(\cdot)$ jest próbkową funkcją autokowariancji, tzn.

$$\widehat{\gamma}_{\widehat{\epsilon^2}}(j) = \frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n-|j|}\left(\widehat{\epsilon}^2_{t,n} - \overline{\widehat{\epsilon}^2}\right)\left(\widehat{\epsilon}^2_{t+|j|,n} - \overline{\widehat{\epsilon}^2}\right)$$

gdzie $\overline{\widehat{\epsilon}^2} = \frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n}\widehat{\epsilon}^2_{t,n}$, a $\widehat{\epsilon}_{t,n}$ są oszacowaniami obserwacji ϵ_t .

Założenia, c. d.

Uwaga

Założenia (A1'), (A2), (G1)- (G5) pozwalają nam rozważać modele $ARMA(p, q) + GARCH(r, s)$*, które można przedstawić w następującej formie*

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sigma_t \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i \sigma_{t-i}^2. \end{aligned}$$

Bootstrap sitowy - algorytm

W podanym poniżej algorytmie konstrukcji replikacji bootstrapowych metodą sita wykorzystujemy dwie procedury aproksymacji przybliżając model $AR(\infty)$ ciągiem modeli $AR(p)$ skończonego rzędu $p = p(n)$ (Założenie (B)) oraz aproksymując model $GARCH(r, s)$ białego szumu ciągiem modeli $ARCH(q)$, $q = q(n)$.

Krok 1. Wybieramy rząd aproksymacji $p = p(n)$, wykorzystując odpowiednie kryterium informacyjne np. kryterium informacyjne FPE w przedziale $[0, p_{max}(n)]$, gdzie $p_{max(n)} = 10\log_{10}(n)$ (standardowa wartość w pakietach statystycznych).
Krok 2. Wyznaczamy estymatory residuów

$$\widehat{\epsilon}_{t,n} = X_t - \sum_{j=1}^{p} \widehat{\phi}_{j,n} X_{t-j}, \quad t = p+1, ..., n.$$

Krok 3. Centrujemy estymatory residuów

$$\widetilde{\epsilon}_{t,n} = \widehat{\epsilon}_{t,n} - \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^{n} \widehat{\epsilon}_{t,n}, \quad t = p+1, ..., n.$$

Bootstrap sitowy - algorytm, c. d.

Krok 4. Wybieramy rząd aproksymacji $q = q(n)$, wykorzystując odpowiednie kryterium informacyjne np. kryterium informacyjne *FPE* w przedziale $[0, q_{max}(n)]$, gdzie $q_{max(n)} = 10\log_{10}(n)$.
Krok 5. Estymujemy współczynniki $c_0, c_1, ..., c_q$ modelu $ARCH(q)$ wykorzystując scentrowane residua$\{\widetilde{\epsilon}_t\}_{t=p+1}^{n}$. Estymatory $\widehat{c}_{0,n}, \widehat{c}_{1,n}, ..., \widehat{c}_{q,n}$ mogą być wyznaczone metodą Yule-Walkera.
Krok 6. Wyznaczamy residua

$$\widehat{\xi}_{t,n} = \frac{\widetilde{\epsilon}_{t,n}}{\widehat{\sigma}_t}, \quad t = p+q+1, ..., n,$$

gdzie

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{c}_{0,n} + \sum_{i=1}^{q} \widehat{c}_{i,n}\widetilde{\epsilon}_{t-i,n}^2.$$

Bootstrap sitowy - algorytm, c. d.

Krok 7. Centrujemy residua

$$\widetilde{\xi}_{t,n} = \widehat{\xi}_{t,n} - \frac{1}{n-p-q} \sum_{t=p+q+1}^{n} \widehat{\xi}_{t,n}, \quad t = p+q+1, ..., n.$$

oraz losujemy ze zwracaniem replikacje ξ_t^* z rozkładu o dystrybuancie

$$\widehat{F}_{\xi,n}(u) = \frac{1}{n-p-q} \sum_{t=p+q+1}^{n} \mathbf{1}\{\widetilde{\xi}_{t,n} \leqslant u\}.$$

Krok 8. Wyznaczamy bootstrapowe replikacje $\epsilon_1^*, ..., \epsilon_n^*$ z równości

$$\epsilon_t^* = \widehat{\sigma}_t \xi_t^*.$$

Krok 9. Generujemy bootstrapowe obserwacje

$$X_t^* = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\phi}_{j,n} X_{t-j}^* + \epsilon_t^*.$$

Bootstrapowa predykcja

Dysponując bootstrapowymi replikacjami $X_t^*,\ t = 1, 2, .., n$ możemy rozszerzyć zbiór bootstrapowych replikacji o h kroków wykorzystując aproksymację $AR(p) + ARCH(q)$

$$
\begin{aligned}
X_{n+h}^* &= \sum_{j=1}^{p} \widehat{\phi}_j^* X_{n+h-j}^* + \epsilon_{n+h}^*, \\
\epsilon_{n+h}^* &= \sigma_{n+h}^* \xi_{n+h}^*, \\
\sigma_{n+h}^{*2} &= \widehat{c}_0^* + \sum_{j=1}^{q} \widehat{c}_j^* \epsilon_{n+h-j}^{*2},
\end{aligned}
$$

gdzie $\widehat{\phi}_j^*$, $j = 1, ..., p$ oraz $\widehat{c}_j^*$, $j = 0, 1, ..., q$ są bootstrapowymi replikacjami estymatorów $\widehat{\phi}_j$ oraz $\widehat{c}_j$ wyznaczonymi na podstawie replikacji $X_t^*,\ t = 1, 2, .., n$.

Hybrydowe bootstrapowe przedziały ufności

Aproksymując rozkład prawdopodobieństwa błędu predykcji $X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}$ rozkładem bootstrapowym błędu predykcji $X^*_{n+h} - \widehat{X}^*_{n+h}$ możemy skonstruować bootstrapowy predykcyjny przedział ufności dla X_{n+h} postaci

$$I_B(h) = [\widehat{X}_{n+h} + q^*_{\frac{\alpha}{2}}, \widehat{X}_{n+h} + q^*_{1-\frac{\alpha}{2}}],$$

gdzie $q^*_{\frac{\alpha}{2}}$, $q^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ są kwantylami rozkładu $X^*_{n+h} - \widehat{X}^*_{n+h}$.

Uwaga

W praktyce bootstrapowe kwantyle q^*_α aproksymujemy ich odpowiednikami $\widehat{q}^*_\alpha$ wyznaczonymi metodą Monte Carlo.

Studentyzowane bootstrapowe przedziały ufności

W bootstrapie studentyzowanym aproksymując studentyzowaną wersję rozkładu błędu predykcji $\frac{X_{n+h}-\widehat{X}_{n+h}}{\widehat{\sigma}_{X,n}(h)}$ odpowiednim rozkładem bootstrapowym $\frac{X^*_{n+h}-\widehat{X}^*_{n+h}}{\widehat{\sigma}^*_{X,n}(h)}$ możemy skonstruować bootstrapowy, studentyzowany, predykcyjny przedział ufności dla X_{n+h} postaci

$$I_{B-t}(h) = [\widehat{X}_{n+h} + t^*_{\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}_{X,n}(h), \widehat{X}_{n+h} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}_{X,n}(h)],$$

gdzie $\widehat{\sigma}_{X,n}(h)$ jest estymatorem średniokwadratowego błędu predykcji $\sigma_{X,n}(h)$, a $\widehat{\sigma}^*_{X,n}(h)$ jego bootstrapową replikacją oraz $t^*_{\frac{\alpha}{2}}$, $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ są kwantylami $\frac{X^*_{n+h}-\widehat{X}^*_{n+h}}{\widehat{\sigma}^*_{X,n}(h)}$.

Uwaga

W praktyce bootstrapowe kwantyle t^*_α aproksymujemy ich odpowiednikami $\widehat{t}^*_\alpha$ wyznaczonymi metodą Monte Carlo.

Pomocnicze lematy

Lemat

Niech będą spełnione założenia (A1') z $s = 4$, *(A2) z* $r \geqslant 1$, *(B), (G1)-(G5). Wówczas*

$$\xi_t^* \xrightarrow{D^*} \xi_t, \quad \text{według prawdopodobieństwa dla dowolnego } t.$$

Wniosek

Niech będą spełnione założenia (A1') z $s = 4$, *(A2) z* $r \geqslant 1$, *(B), (G1)-(G5). Wówczas*

$$\epsilon_t^* \xrightarrow{D^*} \epsilon_t, \quad \text{według prawdopodobieństwa dla dowolnego } t.$$

Pomocnicze lematy, c. d.

Lemat

Niech będą spełnione założenia (A1') z $s = 4$, *(A2) z* $r \geqslant 1$, *(B), (G1)-(G5). Wówczas dla* $h \geqslant 1$ *możemy przedstawić błąd predykcji*

$$d_{1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_{n+1} + ... + d_{h-1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_{n+h-1} + \epsilon_{n+h} + o_P(1),$$

gdzie $d_{1,h}, ..., d_{h-1,h}$ *są pewnymi funkcjami ciągłymi oraz analogicznie możemy przedstawić bootstrapowy błąd predykcji*

$$d_{1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon^*_{n+1} + ... + d_{h-1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon^*_{n+h-1} + \epsilon^*_{n+h} + o_{P^*}(1),$$

z tymi samymi funkcjami $d_{1,h}, ..., d_{h-1,h}$.

Zgodność bootstrapu hybrydowego

Twierdzenie

Załóżmy, że spełnione są założenia (A1') z $s = 4$, (A2) z $r \geqslant 1$, (B), (G1) - (G5). Wówczas

$$|P^*(X^*_{n+h} - \widehat{X}^*_{n+h} \leqslant u) - P(X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h} \leqslant u)| = o_P(1),$$

dla każdego u będącego punktem ciągłości zmiennej losowej

$$d_{1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_1 + ... + d_{h-1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_{h-1} + \epsilon_h.$$

Uwaga

Jeżeli do założeń powyższego twierdzenia dołączymy założenie, że rozkład ξ_t jest rozkładem ciągłym, to

$$\sup_u |P^*(X^*_{n+h} - \widehat{X}^*_{n+h} \leqslant u) - P(X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h} \leqslant u)| = o_P(1),$$

Zgodność bootstrapu studentyzowanego

Lemat

Niech będą spełnione założenia (A1) z $s = 4$, (A2) z $r \geqslant 1$, (B), (G1) - (G5). Wówczas

$$\widehat{\sigma}_X(h) \xrightarrow{P} \sigma_X(h),$$

oraz analogicznie

$$\widehat{\sigma}^*_X(h) \xrightarrow{P^*} \sigma_X(h), \quad \textit{według prawdopodobieństwa.}$$

Twierdzenie

Załóżmy, że spełnione są założenia (A1) z $s = 4$, (A2) z $r \geqslant 1$, (B), (G1) - (G5). Jeśli rozkład ξ_t jest typu ciągłego, to

$$\sup_u \left| P^* \left(\frac{X^*_{n+h} - \widehat{X}^*_{n+h}}{\widehat{\sigma}^*_{X,n}(h)} \leqslant u \right) - P \left(\frac{X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}}{\widehat{\sigma}_{X,n}(h)} \leqslant u \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Zgodność hybrydowych przedziałów predykcyjnych

W następnych dwóch twierdzeniach przez $\widehat{I}_B(h)$ $(\widehat{I}_{B-t}(h)$ odpowiednio) będziemy oznaczać predykcyjne bootstrapowe przedziały ufności tej samej postaci co $I_B(h)$ $(I_{B-t}(h)$ odpowiednio), ale z aproksymacjami kwantyli $\widehat{q}^*_\alpha$ $(\widehat{t}^*_\alpha$ odpowiednio).

Twierdzenie

Niech będą spełnione założenia (A1') z $s = 4$, (A2) z $r \geqslant 1$, (B), (G1) - (G5). Ponadto, załóżmy, że kwantyle $c_{\frac{\alpha}{2}}$, $c_{1-\frac{\alpha}{2}}$ rozkładu zmiennej losowej $d_{1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_1 + \ldots + d_{h-1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_{h-1} + \epsilon_h$ są punktami ciągłości dystrybuanty tego rozkładu. Wówczas

$$P\left(X_{n+h} \in \widehat{I}_B(h)\right) \to 1 - \alpha, \quad \textit{przy } n \to \infty.$$

Zgodność studentyzowanych przedziałów predykcyjnych

Twierdzenie

Niech będą spełnione założenia (A1') z $s = 4$, *(A2) z* $r \geqslant 1$, *(B), (G1) - (G5). Ponadto, załóżmy, że kwantyle* $c_{\frac{\alpha}{2}}$, $c_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *rozkładu zmiennej losowej* $(d_{1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_1 + \ldots + d_{h-1,h}(\underline{\Phi}_{h-1})\epsilon_{h-1} + \epsilon_h)/\sigma_X(h)$ *są punktami ciągłości dystrybuanty tego rozkładu. Wówczas*

$$P\left(X_{n+h} \in \widehat{I}_{B-t}(h)\right) \to 1 - \alpha, \quad \textit{przy } n \to \infty.$$

Symulacje

Rozważmy model $ARMA(1,1) + GARCH(1,1)$ postaci

$$X_t = 0.8X_{t-1} - 0.5\epsilon_{t-1} + \epsilon_t,$$
$$\epsilon_t = \sigma_t \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = 1 + 0.5\epsilon_{t-1}^2 + 0.4\sigma_{t-1}^2,$$

gdzie $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ciąg i. i. d. zmennych losowych o rozkładzie

- standardowy rozkład normalny - N ,
- rozkład t-Studenta z pięcioma stopniami swobody - T,
- rozkład χ^2 z pięcioma stopniami swobody - χ^2.

Przyjmujemy: ilość obserwacji $n = 100, 200$; horyzont predykcji $h = 1, ..., 5$; poziom istotności $\alpha = 0.1$; ilość replikacji bootstrapowych $B = 1000$; ilość powtórzeń Monte Carlo $N = 500$.

Symulacje, c. d.

Rozkład	h	hybrid bootstrap	t-bootstrap
N	1	87.5 (2.701)	89.7 (2.854)
	2	87.9 (2.763)	90.1 (2.909)
	3	88.1 (2.798)	89.9 (2.943)
	4	88.3 (2.821)	89.4 (2.973)
	5	89.3 (2.833)	91.2 (2.978)
T	1	88.7 (2.378)	89.9 (2.497)
	2	89.5 (2.457)	91.7 (2.581)
	3	89.7 (2.504)	90.9 (2.631)
	4	88.4 (2.524)	89.8 (2.658)
	5	89.0 (2.543)	89.9 (2.672)
χ^2	1	88.7 (2.415)	90.4 (2.536)
	2	89.7 (2.491)	91.0 (2.613)
	3	90.0 (2.534)	92.0 (2.658)
	4	89.9 (2.554)	91.1 (2.680)
	5	88.9 (2.569)	90.3 (2.696)

Tabela: Empiryczne prawdopodobieństwa pokrycia; $n = 100$

Symulacje, c. d.

Rozkład	h	hybrid bootstrap	t-bootstrap
N	1	89.9 (2.683)	90.5 (2.762)
	2	88.9 (2.760)	89.6 (2.837)
	3	89.1 (2.821)	90.0 (2.893)
	4	89.8 (2.857)	90.6 (2.929)
	5	91.0 (2.886)	92.3 (2.957)
T	1	91.9 (2.388)	93.0 (2.466)
	2	90.7 (2.448)	91.8 (2.523)
	3	90.5 (2.505)	91.6 (2.577)
	4	90.7 (2.538)	91.5 (2.609)
	5	91.2 (2.558)	91.6 (2.634)
χ^2	1	88.8 (2.492)	90.8 (2.565)
	2	89.9 (2.555)	90.4 (2.618)
	3	90.9 (2.596)	91.5 (2.657)
	4	91.1 (2.613)	91.5 (2.674)
	5	90.7 (2.638)	90.9 (2.696)

Tabela: Empiryczne prawdopodobieństwa pokrycia; $n = 200$

Bibliografia

- Basrak, B., Davis, R.A., Mikosch, T. (2002). Regular variation of GARCH processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 99, 95-115.
- Berkes, I., Horvath, L., Kokoszka P. (2003). GARCH processes: structure and estimation. *Bernoulli*, 9(2), 201-227.
- Bollerslev, P. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econometrics*, 31, 307-327.
- Bühlmann, P. (1997). Sieve bootstrap for time series. *Bernouli*, 3(2), 123-148.
- Chłapiński, G., Różański, R. Prediction intervals for ARMA+GARCH models via sieve bootstrap. Preprint.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, vol 50, no. 4,987-1007.
- Różański, R. and Zagdański, A. (2004). On the consistency of sieve bootstrap prediction intervals for stationary time series. *Discussiones Mathematicae. Probability and Statistics*, Vol. 24, 5-40.
- Zagdański, A. (2005). On the construction and properties of bootstrap-t prediction intervals for stationary time series. *Probability*