POISSONOWSKA APROKSYMACJA W SYSTEMACH NIEZAWODNOŚCIOWYCH

Barbara Popowska
bpopowsk@math.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska

http://www.put.poznan.pl/

PROGRAM REFERATU

1. WPROWADZENIE
2. GRAF JAKO MODEL SYSTEMU TECHNICZNEGO
3. METODA APROKSYMACJI POISSONOWSKIEJ
4. PIERWSZY SYSTEM NIEZAWODNOŚCIOWY
5. DRUGI SYSTEM NIEZAWODNOŚCIOWY
6. PODSUMOWANIE

1. WPROWADZENIE

Czas zdatności systemu technicznego jest nieujemną zmienną losową o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa, który często jest nieznany.

PYTANIE:

Jak przewidzieć liczbę obiektów z populacji o takim rozkładzie, która uszkodzi się do chwili t ?

2.GRAF JAKO MODEL SYSTEMU TECHNICZNEGO

1. Przedmiot modelowania: systemy złożone z maszyn, przekaźników, operatorów, itp.

2. Wyróżniamy dwa stany obiektów: zdatności i niezdatności
   Stan *i*-tego elementu ($i \in C$) w chwili *t* określa zmienna losowa

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy element jest zdatny w chwili } t \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

3. Urządzenia pracują i psują się w sposób niezależny jedno od drugiego.

4. Modelowanie systemu technicznego za pomocą grafu G=G(V,L)
   V-zbiór wierzchołków czyli elementów systemu (przekaźników, operatorów, itp.)
   L- zbiór krawędzi czyli połączeń w szeroko rozumianym sensie pomiędzy nimi

3.METODA APROKSYMACJI POISSONOWSKIEJ

Metoda polega na oszacowaniu odległości między rozkładem danej zmiennej losowej a rozkładem normalnym lub Poissona (w zależności od aproksymowanego rozkładu)

Metodę wprowadzili:
- dla rozkładu normalnego Stein w roku 1972
- dla rozkładu Poissona Chen w roku 1975
- zastosował do teorii grafów Barbour w roku 1982

PODSTAWOWE POJĘCIA

1. Metryka całkowitej wariacji między rozkładami *R(X)* i *R(Y)*, odpowiednio dwóch zmiennych losowych *X* i *Y*

$$d\big(R(X), R(Y)\big) = \sup_{A} \left| P(X \in A) - P(Y \in A) \right|$$

Gdy X i Y są nieujemnymi zmiennymi losowymi o wartościach całkowitych, metryka ta przyjmuje postać:

$$d\big(R(X), R(Y)\big) = \sup_{A \subseteq Z^{+}} \left| P(X \in A) - P(Y \in A) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left| P(X = k) - P(Y = k) \right|$$

gdzie $Z^{+} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$.

2. Oszacowanie metryki całkowitej wariacji podane przez Chena

Niech *I* będzie dowolnym zbiorem „indeksów” i niech dla każdego

$$\alpha \in I$$

$$X_\alpha = \begin{cases} 1 & z \quad prawd. \quad p_\alpha \\ 0 & z \quad prawd. \quad 1-p_\alpha \end{cases}.$$

$$X = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha ,$$

$$\lambda = E(X) = \sum_{\alpha \in I} p_\alpha$$

Załóżmy teraz, że dla każdego α istnieje podzbiór indeksów $B_\alpha \subset I$ taki, że $\alpha \in B_\alpha$ oraz zmienna losowa X_α jest niezależna od zmiennych losowych $\{X_\beta : \beta \notin B_\alpha\}$.

Zdefiniujmy dwie wielkości

$$b_1 = \sum_{\alpha \in I} \sum_{\beta \in B_\alpha} p_\alpha p_\beta$$

oraz

$$b_2 = \sum_{\alpha \in I} \sum_{\beta \in B_\alpha - \{\alpha\}} E(X_\alpha X_\beta).$$

TWIERDZENIE 1. (CHEN 1975r.)

Niech X będzie nieujemną zmienną losową o wartościach całkowitych, natomiast Z zmienną losową o rozkładzie Poissona $P(\lambda)$. Wówczas

$$d\big(R(X), R(Z)\big) \le 2(b_1 + b_2)\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

oraz

$$\left|P(X=0) - e^{-\lambda}\right| \le (b_1 + b_2)\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Uwaga. *Z Twierdzenia* 1 *otrzymujemy klasyczny wynik o zbieżności według dystrybuanty ciągu zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym do rozkładu Poissona. Rzeczywiście, niech* X_n *mają rozkład dwumianowy* $B_n(p)$ *oraz niech* $p=p(n)$ *będzie takie, że* $np \to \lambda$, *gdzie* $0 < \lambda < \infty$. *Wówczas* $B_\alpha=\{\alpha\}$ *i przyjmując* $I=\{1,2,\ldots,n\}$ *dostajemy* $b_1=np^2$ *oraz* $b_2=0$.

Zatem

$$d\big(R(X_n), R(Z)\big) \le 2np^2 \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \approx \frac{2\lambda^2}{n} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \to 0$$

gdy $n \to \infty$

4. PIERWSZY SYSTEM NIEZAWODNOŚCIOWY

- Weźmy pod uwagę system przekaźnikowy zbudowany z 2^n możliwych „urządzeń logicznych”, z których każde składa się z *n* przekaźników (ponumerowanych od 1 do *n*) mogących być w stanie aktywnym (wartość 1) lub nieaktywnym (wartość 0).

- Dwa urządzenia logiczne mogą przekazywać informacje między sobą wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się wartością dokładnie jednego przekaźnika, występującego na tym samym miejscu w obu urządzeniach.

Załóżmy, że kierunek przekazywanej informacji między dwoma ustalonymi urządzeniami logicznymi (mogącymi przekazywać informacje) jest losowy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i niezależny od kierunku przekazywanych informacji na pozostałych parach urządzeń.

- Układ logiczny jest „blokujący” jeżeli wszystkie urządzenia logiczne połączone z tym układem (a jest ich *n*) przekazują informacje do tego układu. Innymi słowy, z układu blokującego żadna informacja nie może wydostać się „na zewnątrz” i system przekaźnikowy staje się zawodny. Zatem będziemy mówili, że rozważany system jest niezawodny, jeżeli nie zawiera żadnego blokującego układu logicznego.

- Jaka jest niezawodność takiego systemu?

Opisany powyżej system przekaźnikowy może być reprezentowany grafem prostym zwanym n-sześcianem. Jest to graf, którego wierzchołkami są ciągi binarne długości n (urządzenia logiczne lub operatorzy), przy czym dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się dokładnie jednym elementem stojącym na tym samym miejscu. Taki graf ma oczywiście 2^n wierzchołków, z których każdy ma stopień n. Ponieważ w grafie prostym suma stopni wszystkich wierzchołków równa jest podwojonej liczbie krawędzi, zatem n-sześcian posiada $n2^{n-1}$ krawędzi.
Przyporządkujmy teraz losowo każdej krawędzi skierowanie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ niezależnie jedna od drugiej.

Oznaczmy przez $X=X_n$ liczbę wierzchołków, w których wszystkie n krawędzie skierowane są do wierzchołka. Innymi słowy, zmienna losowa X przelicza wierzchołki „blokujące” w systemie przekaźnikowym reprezentowanym przez losowo skierowany n-sześcian.

Powyższy system przekaźnikowy będzie niezawodny jeżeli $X=0$.

Oszacujemy teraz prawdopodobieństwo tego zdarzenia przy pomocy aproksymacji Poissonowskiej.

TWIERDZENIE 2.

Przy podanych oznaczeniach zachodzi oszacowanie

$$\left|P(X=0)-e^{-1}\right| \leq \left(1-e^{-1}\right)(n+1)2^{-n}.$$

5.DRUGI SYSTEM NIEZAWODNOŚCIOWY

- Zastosowanie: w systemach kierowania lotami samolotów.

- Niech dany będzie układ złożony z d jednostek traktowanych jako samoloty będące pod kontrolą n rozróżnialnych operatorów.

- Samoloty są przyporządkowywane poszczególnym operatorom losowo w sposób jednostajny, tj. prawdopodobieństwo, że dany samolot zostanie kontrolowany przez *i*- tego operatora wynosi $\frac{1}{d}$ dla każdego $i=1,2,...,n$.

- Będziemy mówili, że dany operator jest „przepełniony” jeżeli kontroluje co najmniej *k* samolotów, natomiast układ będzie niezawodny jeżeli nie zawiera ani jednego „przepełnionego” operatora.

- Oszacujemy prawdopodobieństwo niezawodności takiego układu.

- Ponumerujmy operatorów od 1 do *n*. Niech zbiorem „indeksów *I* będą *k*- elementowe podzbiory zbioru {1,2,..*n*}, tj.

$$I = \{\alpha \subset \{1,2,\ldots,n\} : |\alpha| = k\}.$$

Oczywiście $|I| = \binom{n}{k}$.

- Dalej, niech $X_\alpha = 1$ jeżeli samoloty indeksowane przez podzbiór α są przyporządkowane temu samemu operatorowi, w przeciwnym razie przyjmujemy $X_\alpha = 0$.

- Wówczas

$$X = X(k,d,n) = \sum_{\alpha \in I} X_{\alpha}$$

jest liczbą operatorów kontrolujących co najmniej k samolotów.

- Interesuje nas oszacowanie niezawodności rozpatrywanego systemu, mianowicie oszacowanie dla

$$P(X(k,d,n) = 0)$$

- Oszacujmy więc metrykę całkowitej wariacji zgodnie z Twierdzeniem 1.

Twierdzenie 3.

Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona P(λ),
gdzie $\lambda = \binom{n}{k} d^{1-k}$. *Wówczas*

$$d(R(X(k,d,n)),R(Z)) < \frac{2\lambda k^2}{n}\left(d^{k-2}+1\right)\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

6.PODSUMOWANIE

- W miarę rozwoju techniki jej wytwory stają się coraz bardziej złożone, składają się z dziesiątek, a nawet setek części i ludzi, z których każda może wpływać na jakość pracy złożonego systemu technicznego.

- Oczekuje się, aby system był niezawodny, czyli zdolny do wykonywania przydzielonych mu zadań.

- Modele teorii niezawodności budowane są w oparciu o różne dyscypliny matematyczne. W przedstawionej koncepcji modelowania systemowego zastosowano teorię grafów.

- Dokonano aproksymacji nieznanych rozkładów czasów zdatności rozważanych systemów niezawodnościowych za pomocą rozkładu Poissona i oszacowano błąd tej aproksymacji.

- Aproksymacja Poissonowska jest jedną z możliwości. Dalsze oszacowania mogą biec w kierunku innych rozkładów.

LITERATURA:

1. A.Barbour, Poisson convergence and random graphs. *Math. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 92, 349-359 (1982).
2. A.Barbour, O.Chryssaphinou, M.Ross, Compound Poisson approximation in systems reliability. *Naval Research Logistics*, Vol.43, 251-264 (1996).
3. A.Barbour, L.Holst, S.Janson, Poisson Approximation. Oxford University Press, Oxford, 1992.
4. L.Chen, Poisson approximation for dependent trials. *Annals of Probability*, 3, 534-545 (1975).
5. C.Stein, A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.* 2, University of California Press, Berkeley, 583-602 (1972).