O GEOMETRII DWUWYMIAROWYCH ROZKŁADÓW STABILNYCH I JEJ TESTOWANIU

J.K. MISIEWICZ,
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Definicja 1. *X jest stabilna jeśli dla dowolnych $a, b > 0$*

$$aX + bX' \stackrel{d}{=} cX + d.$$

Dla X symetrycznych mamy tylko dwa parametry, bowiem

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \exp\{-A|t|^\alpha\},$$

gdzie $A > 0$ oraz $\alpha \in (0, 2]$.

Przy rozkładach niesymetrycznych dochodzą jeszcze dwa parametry.

Nie można estymować wprost gęstości.

Literatura na temat estymacji parametrów na stronie internetowej Johna Nolana - bardzo bogata, ale zbieżność estymatorów dość wolna.

Date: 10 grudnia 2009.

Twierdzenie 1. *Jeśli (X, Y) jest symetryczny α-stabilny, to istnieje skończona miara ν na $\mathbb{R}^2$ taka, że*

$$\mathbf{E}e^{i(aX+bY)} = \exp\Big\{-\int\dots\int_{\mathbb{R}^2} |ax+by|^\alpha \, \nu(dx,dy)\Big\}, \qquad a,b \in \mathbb{R}^2.$$

Miarę ν nazywamy (kanoniczną, jeśli $\mathrm{supp}(\nu) = S_1$) miarą spektralną wektora (X, Y).

Uwaga. Dla każdego $a, b > 0$ zmienna $aX + bY$ ma rozkład SαS z parametrem skali A:

$$A^\alpha(a,b) = \int\dots\int_{\mathbb{R}^2} |ax+by|^\alpha \, \nu(dx,dy),$$

więc możemy estymować $\alpha(a, b)$ oraz $A(a, b)$ na podstawie wartości z próby dla zmiennej $aX + bY$.

W szczególności z próby $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ o rozkładzie SαS możemy estymować

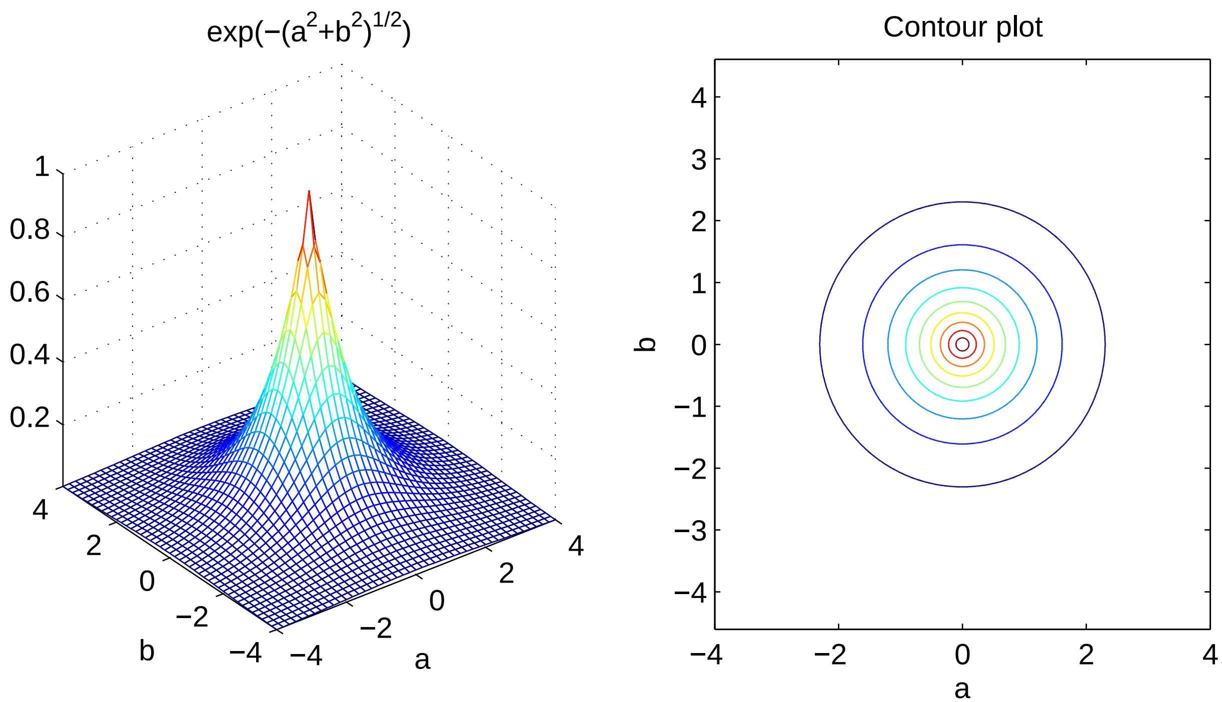
$$\begin{array}{lll} \alpha(1,0), A(1,0) & \text{na podstawie} & x_1, \dots, x_n \\ \alpha(0,1), A(0,1) & \text{na podstawie} & y_1, \dots, y_n \\ \alpha(1,1), A(1,1) & \text{na podstawie} & x_1+y_1, \dots, x_n+y_n. \end{array}$$

Powinno być $\alpha(a, b) = \alpha$ dla każdego $a, b > 0$, ale estymatory zbiegają wolno!

Najprostsze przypadki:

- Wektory sub-gaussowskie - miara ν jest niezmiennicza na obroty

$$\mathbf{E}e^{i(aX+bY)} = \exp\left\{-C\left(a^2+b^2\right)^{\alpha/2}\right\}.$$



RYSUNEK 1. Funkcja charakterystyczna sub-gaussowskiego (niezmienniczego na obroty) wektora Cauchyégo

Subgaussowskość sprawdzamy badając czy niezależne są

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) \quad \text{oraz } \sqrt{X^2+Y^2}$$

oraz czy wektor

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$

ma rozkład jednostajny na S_1.

Stabilność, tzn. parametr α otrzymamy np. z estymacji parametru $\alpha/2$ dla $\alpha/2$-stabilnej zmiennej losowej

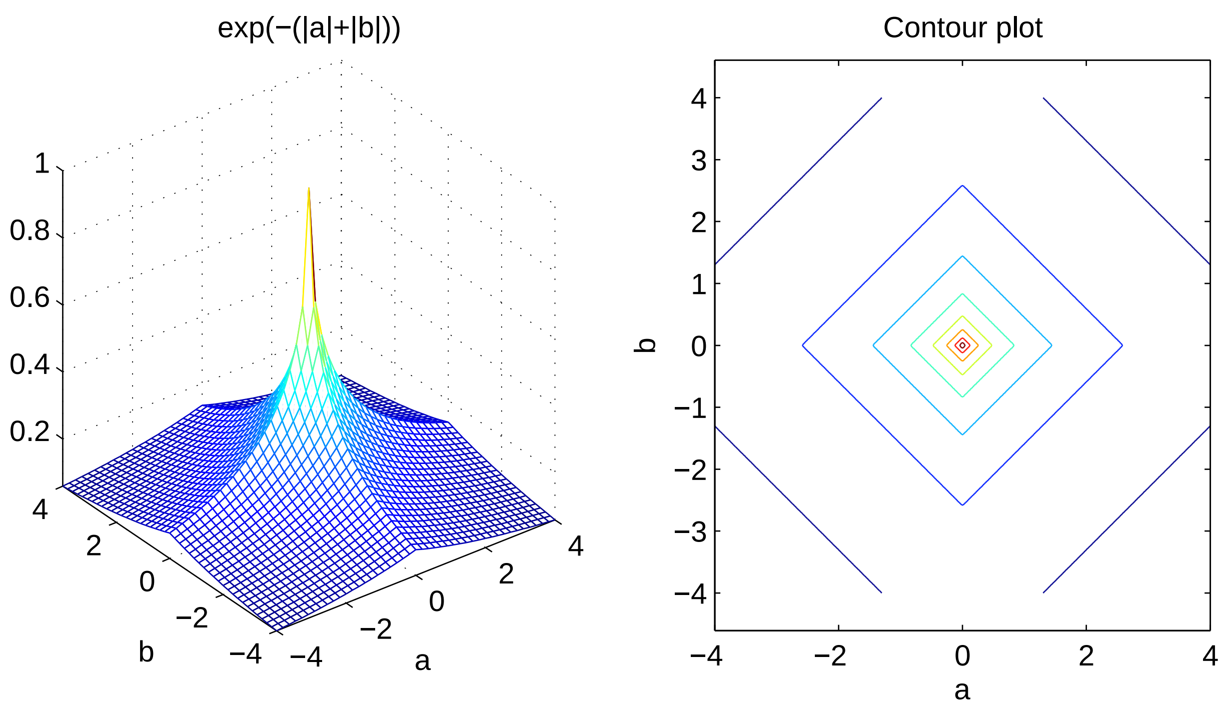
$$\sqrt{X^2+Y^2}$$

W rozprawie doktorskiej Piotra Szymańskiego znajdziemy estymację parametru α na podstawie całej próby $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ - proponowany estymator jest poprawionym estymatorem Zołotariewa.
Stosowalność tylko dla rozkładów stabilnych niezmienniczych na obroty

Literatura na temat estymacji parametrów rozkładów stabilnych niezmienniczych na obroty na stronie internetowej Johna Nolana

• Niezależne współrzędne

$$\mathbf{E}e^{i(aX+bY)} = \exp\left\{-C\left(|a|^\alpha + |b|^\alpha\right)\right\}.$$



Rysunek 2. Funkcja charakterystyczna dwu-wymiarowego rozkładu Cauchy'ego o niezależnych współrzędnych

W tym przypadku wystarczy przetestować

niezależność zmiennych X i Y
oraz stabilność form liniowych $aX + bY$.

I to już koniec!

Inne rozkłady stabilne nie były badane!

Nie dlatego, że nikt nie chciał!

• Wektor α-tabilny może być β-substabilny dla pewnego $0 < \alpha < \beta < 2$.
Jeśli

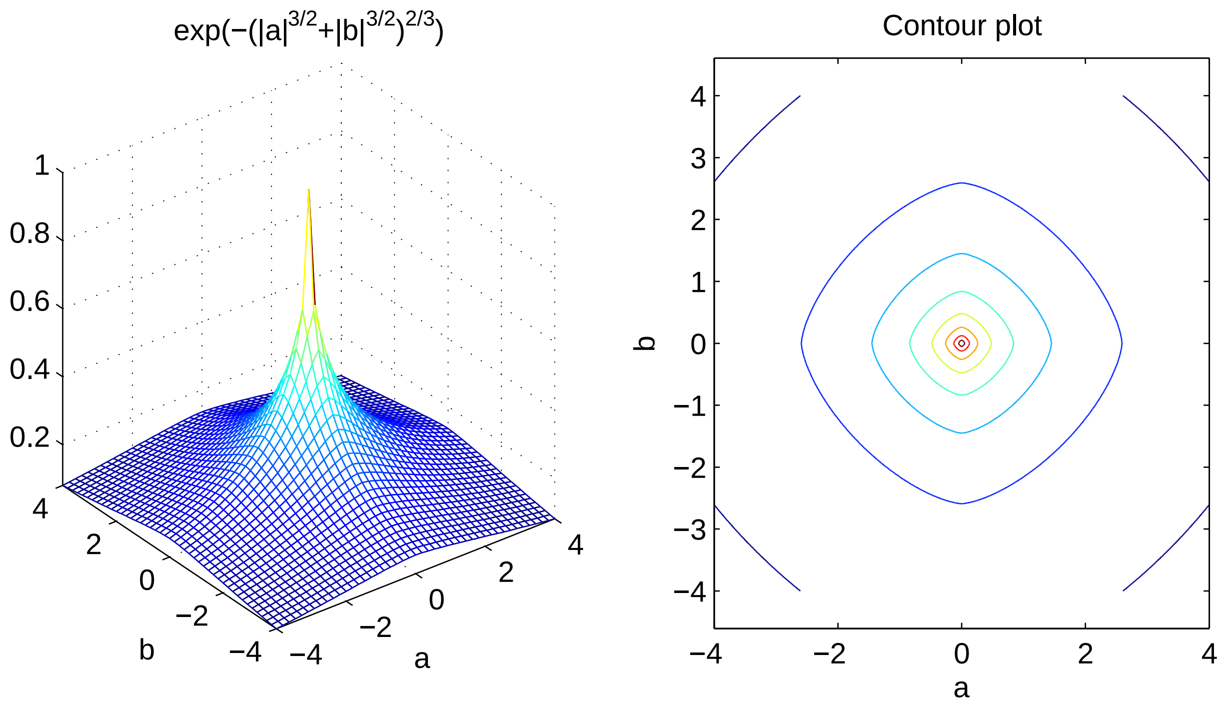
$$(X, Y) = (Z, W)\,\Theta^{1/\beta}$$

jest α-stabilny, jeśli (Z, W) jest β-stabilny, zmienna Θ jest dodatnia α/β-stabilna, $(Z, W)\perp\Theta$.

Wtedy

$$\mathbf{E}e^{i(aX+bY)} = \exp\left\{-C\left(|a|^{\beta} + |b|^{\beta}\right)^{\alpha/\beta}\right\}.$$

Poziomice funkcji charakterystycznej są takie same jak poziomice funkcji charakterystycznej (Z, W).



RYSUNEK 3. Funkcja charakterystyczna dwuwymiarowego rozkładu Cauchy'ego, który jest 3/2-substabilny

Niezależne są

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) = \left(\frac{Z}{\sqrt{Z^2+W^2}}, \frac{W}{\sqrt{Z^2+W^2}}\right) \quad \text{oraz} \quad \sqrt{X^2+Y^2} = \Theta^{1/\beta},$$

jednak wektor

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$

nie ma rozkładu jednostajnego na S_1.

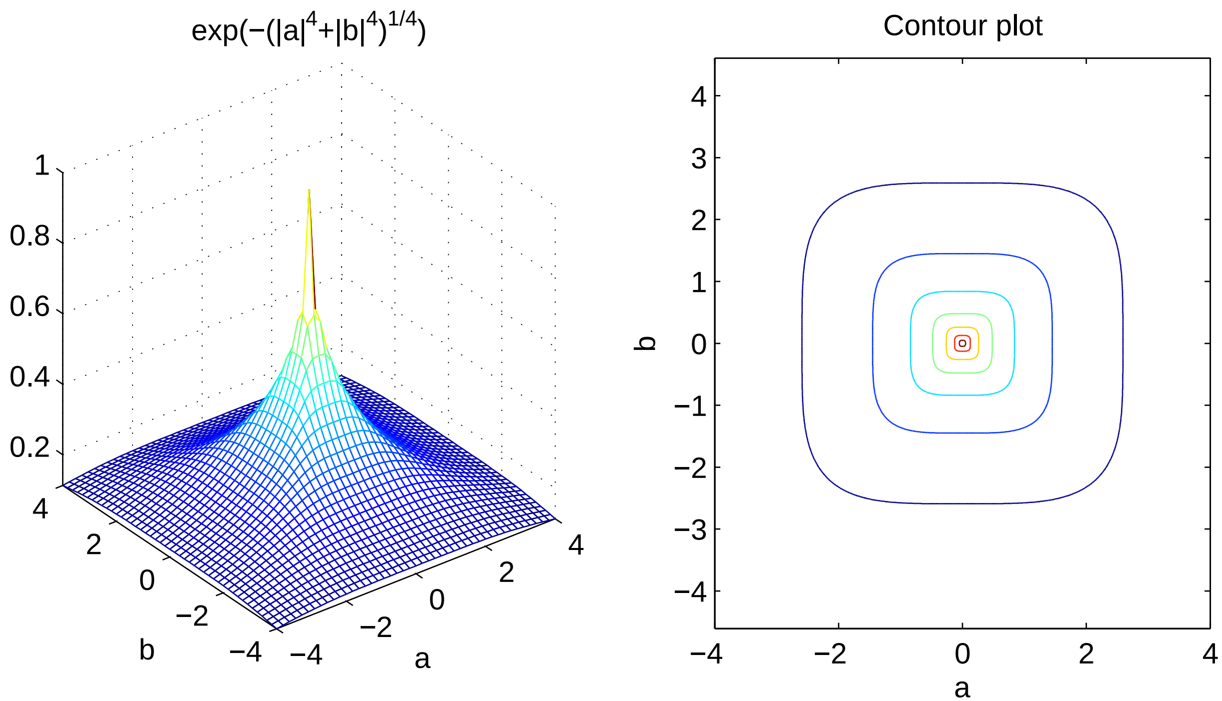
Dla $\beta = 1$ otrzymujemy, że

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad \sim \quad \frac{(1+u^2)\,\mathrm{sgn}(1-2u^2)}{\pi^2(1-u^2)(1-2u^2)}\,\ln\frac{1-u^2}{u^2}\mathbf{1}_{(-1,1)}(u).$$

- α-stabilne rozkłady ℓ_β-symetryczne dla $beta > 2$.

$$\mathbf{E}e^{i(aX+bY)} = \exp\left\{-C\left(|a|^\beta + |b|^\beta\right)^{\alpha/\beta}\right\}.$$

Możliwe tylko dla wektorów dwuwymiarowych!



Rysunek 4. Funkcja charakterystyczna dwuwymiarowego ℓ_4-symetrycznego rozkładu Cauchy'ego

Tutaj

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) \quad \text{oraz} \quad \sqrt{X^2+Y^2},$$

nie są niezależne a wektor

$$\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$$

nie ma rozkładu jednostajnego na S_1.