Uwagi o równości estymatora najmniejszych kwadratów oraz najlepszego liniowego estymatora nieobciążonego

Augustyn Markiewicz

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Model

Model liniowy

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ lub krótko } M = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{V}\}$$

gdzie $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{n,1}$: $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, $Cov(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{V}$,

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}_{n,p}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}_n^{\geq}$ znane oraz

$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{p,1}$ i $\sigma^2 > 0$ nieznane parametry.

Estymacja nieobciążona $\mathrm{X}\beta$

$\mathbf{Gy}$ - nieobciążony liniowy estymator wektora $\mathbf{X}\beta$ jest najlepszym liniowym nieobciążonym estymatorem $\mathbf{X}\beta$ w modelu M jeśli

$$Cov(\mathbf{Gy}) \leq_L Cov(\mathbf{Ly}) \quad \forall\, \mathbf{L} : \; \mathbf{LX} = \mathbf{X}\,.$$

Estymacja nieobciążona $\mathbf{X}\beta$

$\mathbf{Gy}$ - nieobciążony liniowy estymator wektora $\mathbf{X}\beta$ jest najlepszym liniowym nieobciążonym estymatorem $\mathbf{X}\beta$ w modelu M jeśli

$$Cov(\mathbf{Gy}) \leq_L Cov(\mathbf{Ly}) \quad \forall\, \mathbf{L} : \ \mathbf{LX} = \mathbf{X}\,.$$

$\mathbf{GY}$ jest BLUE $\mathbf{X}\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{G}(\mathbf{X} : \mathbf{VX}^{\perp}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0})\,.$$

Estymacja nieobciążona $\mathbf{K}\beta$

Wektor $\mathbf{K}\beta$ nazywamy estymowalnym jeżeli istnieje jego nieobciążony liniowy estymator, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{C}(\mathbf{K}') \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X}'), \quad \text{tzn., gdy} \quad \exists\, \mathbf{C} : \ \mathbf{K} = \mathbf{CX}\,.$$

Estymacja nieobciążona $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$

Wektor $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ nazywamy estymowalnym jeżeli istnieje jego nieobciążony liniowy estymator, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{C}(\mathbf{K}') \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X}'), \quad \text{tzn., gdy} \quad \exists\, \mathbf{C} : \ \mathbf{K} = \mathbf{C}\mathbf{X}\,.$$

$\mathbf{A}\mathbf{Y}$ jest BLUE estymowalnego wektora $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} : \mathbf{V}\mathbf{X}^{\perp}) = (\mathbf{K} : \mathbf{0})\,.$$

Porównanie klas BLUE w M_1 i M_2

Rozważmy dwa modele

$$M_1 = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}_1\} \quad \text{i} \quad M_2 = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}_2\}\,.$$

Porównanie klas BLUE w M_1 i M_2

Rozważmy dwa modele

$$M_1 = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}_1\} \quad \text{i} \quad M_2 = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}_2\}.$$

Niech

$$\{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_1)\} \subseteq \{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_2)\}$$

oznacza, że każda reprezentacja $BLUE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ w M_1 pozostaje $BLUE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ w M_2.

Porównanie klas BLUE w M_1 i M_2

Rao (1968); Mitra i Moore (1983)

Porównanie klas BLUE w M_1 i M_2

Rao (1968); Mitra i Moore (1983)

Następujące relacje są równoważne

(a) $\{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_1)\} \subseteq \{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_2)\}$,

(b) $\{BLUE(\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}|M_1)\} \subseteq \{BLUE(\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}|M_2)\}$

dla każdego estymowalnego $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$,

(c) $\mathcal{C}(\mathbf{V}_2\mathbf{X}^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{V}_1\mathbf{X}^{\perp})$.

Równość klas BLUE w M_1 i M_2

Następujące relacje są równoważne

Równość klas BLUE w M_1 i M_2

Następujące relacje są równoważne

$$\{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_1)\} = \{BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}|M_2)\}\,,$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_2\mathbf{X}^{\perp}) = \mathcal{C}(\mathbf{V}_1\mathbf{X}^{\perp})\,.$$

OLSE

$OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ nazywamy estymator $\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, gdzie $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ jest dowolnym rozwiązaniem równań normalnych

OLSE

$OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ nazywamy estymator $\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, gdzie $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ jest dowolnym rozwiązaniem równań normalnych

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

postaci

OLSE

$OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ nazywamy estymator $\mathbf{K}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, gdzie $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ jest dowolnym rozwiązaniem równań normalnych

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

postaci

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} + [\mathbf{I}_p - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{X}]\mathbf{z}, \ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p,$$

dowolne.

OLSE = BLUE

$OLSE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ jest jednoznaczny

OLSE = BLUE

$OLSE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ jest jednoznaczny

$$OLSE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

oraz podobnie $OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ estymowalnego

$$OLSE(\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{K}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

OLSE = BLUE

$OLSE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ jest jednoznaczny

$$OLSE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

oraz podobnie $OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ estymowalnego

$$OLSE(\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{K}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

W modelu $M_I = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I\}$

$$\mathbf{G}\mathbf{y} = BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \iff \mathbf{G}(\mathbf{X} : \mathbf{X}^{\perp}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0})$$

OLSE = BLUE

$OLSE$ dla $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ jest jednoznaczny

$$OLSE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

oraz podobnie $OLSE$ dla $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ estymowalnego

$$OLSE(\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{K}\mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

W modelu $M_I = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I\}$

$$\mathbf{G}\mathbf{y} = BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \iff \mathbf{G}(\mathbf{X} : \mathbf{X}^{\perp}) = (\mathbf{X} : \mathbf{0})$$

$$\mathbf{H}\mathbf{y} = OLSE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = BLUE(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\,.$$

OLSE (β) = BLUE (β)

Niech $r(\mathbf{X}) = p$ wówczas $\boldsymbol{\beta}$ jest estymowalny i

$$OLSE(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} = \mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

OLSE (β) = BLUE (β)

Niech $r(\mathbf{X}) = p$ wówczas $\boldsymbol{\beta}$ jest estymowalny i

$$OLSE(\boldsymbol{\beta}) \;=\; (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} \;=\; \mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

Niech $M_I = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I\}$ i $M_V = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 V\}$.

OLSE (β) = BLUE (β)

Niech $r(\mathbf{X}) = p$ wówczas $\boldsymbol{\beta}$ jest estymowalny i

$$OLSE(\boldsymbol{\beta}) \;=\; (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} \;=\; \mathbf{X}^{+}\mathbf{y}\,.$$

Niech $M_I = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I\}$ i $M_V = \{\mathbf{y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 V\}$.

Następujące relacje są równoważne

$$\{BLUE(\boldsymbol{\beta})|M_I\} \;=\; \{BLUE(\boldsymbol{\beta})|M_V\}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}^{\perp}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}^{\perp})\,.$$

OLSE (β) = BLUE (β)

Niech $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$. Następujące warunki są równoważne

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}^{\perp}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}^{\perp}), \mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{M}) = \mathcal{C}(\mathbf{M}), \mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{X})$$

OLSE (β) = BLUE (β)

Niech $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$. Następujące warunki są równoważne

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}^{\perp}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}^{\perp}), \mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{M}) = \mathcal{C}(\mathbf{M}), \mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{X})$$

Rao (1967)

$$OLSE(\boldsymbol{\beta}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} = BLUE(\boldsymbol{\beta}|M_V)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z trzech równoważnych warunków

(a) $\mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X})$, (b) $\mathcal{C}(\mathbf{V}\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{M})$, (c) $\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{M} = \mathbf{0}$.