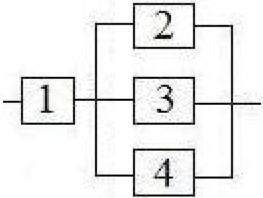
Ograniczenia wariancji czasu życia systemów koherentnych i mieszanych

Krzysztof Jasiński

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK, Toruń

8 grudnia 2009



Rysunek: Przykład systemu koherentnego złożonego z czterech elementów

Inny przykład systemów koherentnych to systemy *"k spośród n"*.
System złożony z n elementów działa, dopóki działa co najmniej k jego elementów.

Oznaczenia:

- T – czas życia systemu złożonego z n elementów
- $X_1, \ldots, X_n$ – czasy życia poszczególnych elementów, i.i.d, o dowolnej ciągłej dystrybuancie F i wariancji $\sigma^2 \in (0; +\infty)$
- $X_{1:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ – statystyki pozycyjne
- $T \in \{X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}\}$

Wtedy *(Samaniego 1985)*:

$$P\left(T \leq x\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i P\left(X_{i:n} \leq x\right),$$

$$s_i = P\left(T = X_{i:n}\right), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = 1, \qquad s_i \geq 0.$$

Wektor sygnatur Samaniego $s = (s_1, \ldots, s_n)$ zależny od budowy systemu, ale nie od F.

$$P\left(X_{i:n} \leq x\right) = \sum_{k=i}^{n} B_{k,n}\left(F\left(x\right)\right), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

rozkład zależny od F, ale nie od budowy systemu.

Rozkład czasu życia *systemu koherentnego* jest taki sam, jak rozkład czasu życia losowo wybranego systemu *"k sposród n"* z prawdopodobieństwami odpowiednio s_{n+1-k}, $k = 1, \ldots, n$.

Istnieje skończona ilość systemów koherentnych o n elementach. Wygodniej jest rozważać zatem *systemy mieszane*, które powstają jako losowa mieszanka systemów *"k spośród n"* z dowolnymi prawdopodobieństwami s_{n+1-k}, $k = 1,\ldots,n$, należącymi do sympleksu $S^n = \{(s_1,\ldots,s_n) : s_i \geq 0, \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$.

$$P\left(T \le x\right) = G_s\left(F\left(x\right)\right),$$

gdzie

$$G_s\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} s_i\right) B_{k,n}\left(x\right), \quad 0 \le x \le 1,$$

to wielomian stopnia n, ściśle rosnący, taki, że $G_s\left(0\right) = 0, G_s\left(1\right) = 1$. Można określić dodatnie wielomiany stopnia $n-1$:

$$G_1\left(x\right) = \frac{G_s\left(x\right)}{x} = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} s_i\right) B_{k,n-1}\left(x\right),$$

$$G_2\left(x\right) = \frac{1 - G_s\left(x\right)}{1-x} = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} s_i\right) B_{k,n-1}\left(x\right).$$

Twierdzenie

Niech T czas życia systemu mieszanego (w szczególności koherentnego) o wektorze sygnatur $s = (s_1, \dots, s_n)$, złożonego z elementów i.i.d, o dowolnej ciągłej dystrybuancie i wariancji $\sigma^2 \in (0; +\infty)$.
Wtedy:

$$\frac{varT}{\sigma^2} \leq \max_{0 \leq u \leq v \leq 1} G_1(u)\, G_2(v).$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
varT &= 2\iint_{\{0<F(x),x\le y,F(y)<1\}} G_s\left(F\left(x\right)\right)\left[1-G_s\left(F\left(y\right)\right)\right] dxdy \\
&\le \sup_{0<u=F(x)\le v=F(y)<1} \frac{G_s\left(u\right)\left[1-G_s\left(v\right)\right]}{u(1-v)} \\
&x \quad 2\iint_{\{0<F(x),x\le y,F(y)<1\}} F\left(x\right)\left[1-F\left(y\right)\right] dxdy \\
&= \max_{0\le u\le v\le 1} G_1\left(u\right) G_2\left(v\right)\sigma^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Twierdzenie

$\max_{0\leq u\leq v\leq 1} G_1(u)\, G_2(v)$ jest osiagane w punkcie położonym na przekątnej $D = \{(u,u) : 0 \leq u \leq 1\}$ lub poza nią, takim, że G_1 przyjmuje maximum lokalne na jego pierwszej współrzędnej,a G_2 na drugiej.

Twierdzenie

Nierówność w oszacowaniu jest optymalna wtedy i tylko wtedy, gdy maximum jest osiągane na przekątnej.

Ponadto jeśli maximum jest osiągane w punkcie (u_0, u_0), to równość w oszacowaniu reprezentacji całkowej Hoeffdinga jest osiągana dla rozkładu dwupunktowego z prawdopodobieństwem mniejszej wartości równym u_0.

Dla znanych systemów koherentnych wielomian G_s jest albo wklęsły albo wypukły albo wypukło-wklęsły. $\max_{0 \leq u \leq v \leq 1} G_1(u) G_2(v)$ jest osiagane na przekątnej.

Uwaga

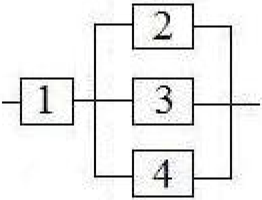
Jeżeli jest wypukły (w szczególności $s = (s_1, \ldots, s_n)$ jest niemalejący), to uzyskujemy $\frac{varT}{\sigma^2} \leq n s_n$.

Uwaga

Jeżeli jest wklęsły (w szczególności $s = (s_1, \ldots, s_n)$ jest nierosnący), to uzyskujemy $\frac{varT}{\sigma^2} \leq n s_1$.

Uwaga

Jeżeli jest wypukło-wklęsły, to w zależności od relacji współczynników s_1 i s_n względem $\frac{1}{n}$ oszacowanie jest osiągane w różnych kawałkach przekątnej.



Wtedy:

$$\frac{varT}{\sigma^2} \leq \max_{0\leq u\leq v\leq 1} G_1\left(0.31690\right) G_2\left(0.31690\right) = 1.03459.$$

Dla systemu *"3 spośród 4"*:

$$\frac{varX_{2:4}}{\sigma^2} \leq \max_{0\leq u\leq v\leq 1} G_1\left(0.32530\right) G_2\left(0.32530\right) = 1.08702.$$

Dla systemu $T = \frac{1}{2}X_{2:6} + \frac{1}{2}X_{5:6}$: oszacowanie z twierdzenia:

$$\frac{varT}{\sigma^2} \leq \max_{0 \leq u \leq v \leq 1} G_1(0.39879)\, G_2(0.60121) = 1.019297,$$

dla dystrybuanty dwupunktowej:

$$\frac{varT}{\sigma^2} \leq \max_{0 \leq u \leq v \leq 1} G_1(0.61832)\, G_2(0.61832) = 1.00342,$$

dla dystrybuanty trzypunktowej:

$$\frac{varT}{\sigma^2} \leq 1.00960 \in (1.00342; 1.019297).$$