D - optymalne sprężynowe układy wagowe

Bronisław Ceranka, Małgorzata Graczyk, Krystyna Katulska

Model

$\mathbf{y} \qquad n \times 1$

$$\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\mathbf{w}, \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{G}$$

gdzie

$\mathbf{w} \quad p \times 1$

σ^2

$\mathbf{G} \quad n \times n$ macierz diagonalna

$\mathbf{X} = (x_{ij}) \quad x_{ij} = 0,\ 1,\ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., p$

Estymator

$$r(\mathbf{X}) = p$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \left(\mathbf{X}^{'}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{'}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mathbf{w}}\right) = \sigma^{2}\left(\mathbf{X}^{'}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

Wong, Masaro (1984)

Ceranka, Katulska (2001)

Ceranka, Graczyk (2003)

Układ D-optymalny

$\mathbf{X}, \quad \mathbf{G}$

$$\det\left(\mathbf{X}^{'}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

Pukelsheim (1993)
Gail, Kiefer (1980, 1982)
Neubauer i inni (1998)
Katulska, Przybył (2007)

Neubauer i innni (1998)

$$\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \frac{(p+1)h}{4p}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{'}\right) \quad \text{gdy } p \text{ jest nieparzyste}$$

$$\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \frac{(p+2)h}{4(p+1)}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{'}\right) \quad \text{gdy } p \text{ jest parzyste,}$$

Macierz układu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}^{'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}^{'} \\ \mathbf{z}^{'} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}, \ \mathbf{z} \ p \times 1$ o elementach 1 lub 0

$\mathbf{X}_1 \ h \times p$ macierz układu, która spełnia warunki podane przez Neubauera (1998)

Definicja (Katulska, Przybył (2007))

Nieosobliwy sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} \end{array} \right]$ z macierzą $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2\mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1}), \;\; g > 0$, jest regularnie D-optymany gdy

$$\det\left(\mathbf{X}^{'}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right) = \begin{cases} (p+1)\left(\frac{(p+1)(n-1)}{4p}\right)^p\left(1 + \frac{gp}{n-1}\right), & p \text{ nieparzyste} \\ (p+1)\left(\frac{(p+2)(n-1)}{4(p+1)}\right)^p\left(1 + \frac{gp}{n-1}\right), & p \text{ parzyste} \end{cases}.$$

Twierdzenie (Katulska, Przybył (2007))

Nieosobliwy sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} \end{array}\right]$ z macierzą $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1}), \;\; g > 0$, jest regularnie D-optymany gdy

(i) dla p nieparzystego

$$\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \tfrac{(p+1)h}{4p}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{'}\right) \text{ oraz } \mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \tfrac{p+1}{2}$$

(ii) dla p parzystego

$$\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \tfrac{(p+2)h}{4(p+1)}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{'}\right) \text{ oraz } \mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \tfrac{p}{2} \text{ lub } \mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \tfrac{p+2}{2}.$$

Definicja (Katulska, Przybył (2007))

Nieosobliwy sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{bmatrix}$ z macierzą $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1}), \;\; g_1, g_2 > 0$, jest regularnie D-optymany gdy

(i) dla p nieparzystego

$$\det\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right) = \begin{cases} \eta\left(\beta + g_1 g_2 p^2\right) & \text{gdy} \;\; (p+1) \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ \eta\left(\beta + g_1 g_2 \frac{p^2(p-1)(p+3)}{(p+1)^2}\right) & \text{gdy} \;\; (p+3) \equiv 0(\mathrm{mod}4) \end{cases}$$

(ii) dla p parzystego

$$\det\left(\mathbf{X}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}\right) = \begin{cases} \xi\left(\beta + g_1 g_2 \frac{p^2(p+1)(p+3)}{(p+2)^2}\right) & \text{gdy} \;\; p \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ \xi\left(\beta + g_1 g_2 (p^2 - 1)\right) & \text{gdy} \;\; (p+2) \equiv 0(\mathrm{mod}4) \end{cases}$$

$\eta = \frac{p+1}{(n-2)^2}\left(\frac{(p+1)(n-2)}{4p}\right)^p, \;\; \beta = (n-2)^2 + (g_1+g_2)p(n-2),$

$\xi = \frac{p+1}{(n-2)^2}\left(\frac{(p+2)(n-2)}{4(p+1)}\right)^p.$

Twierdzenie (Katulska, Przybył (2007))

Nieosobliwy sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array}\right]^{'}$ z macierzą $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1}),\ \ g_1, g_2 > 0$, jest regularnie D-optymany dla p nieparzystego gdy

$$\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \tfrac{(p+1)h}{4p}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p^{'}\right),$$

$\mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \mathbf{z}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p+1}{2}$ oraz

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{z} = \begin{cases} \frac{p+1}{4} & \text{if } (p+1) \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ \frac{p-1}{4} \text{ or } \frac{p+3}{4} & \text{if } (p+3) \equiv 0(\mathrm{mod}4) \end{cases}.$$

Twierdzenie (Katulska, Przybył (2007))

Nieosobliwy sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{bmatrix}^{'}$ z macierzą $\sigma^2 \mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1}), \;\; g_1, g_2 > 0$, jest regularnie D-optymany dla p parzystego gdy $\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_1 = \frac{(p+2)h}{4(p+1)}\left(\mathbf{I}_p + \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p^{'}\right)$ i równocześnie

a) $\mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \mathbf{z}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p}{2}$ oraz

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{z} = \begin{cases} \frac{p}{4} & \text{gdy } \; p \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \\ \frac{p-2}{4} & \text{gdy } \; (p+2) \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \end{cases},$$

b) $\mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p}{2}, \; \mathbf{z}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p+2}{2}$ or $\mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p+2}{2}, \; \mathbf{z}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p}{2}$ oraz

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{z} = \begin{cases} \frac{p}{4} & \text{gdy } \; p \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \\ \frac{p+2}{4} & \text{gdy } \; (p+2) \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \end{cases},$$

c) $\mathbf{x}^{'}\mathbf{1}_p = \mathbf{z}^{'}\mathbf{1}_p = \frac{p+2}{2}$ oraz

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{z} = \begin{cases} \frac{p}{4} + 1 & \text{gdy } \; p \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \\ \frac{p+2}{4} & \text{gdy } \; (p+2) \equiv 0(\mathrm{mod} 4) \end{cases}.$$

Układ zrównoważony o blokach niekompletnych

v liczba obiektów

b liczba bloków

k wielkość bloku

r liczba powtórzeń

λ liczba bloków, w których występuje razem każda para obiektów

$$\mathbf{NN}' = (r - \lambda)\mathbf{I}_v + \lambda \mathbf{1}_v \mathbf{1}_v'$$

Parametry układu: $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda$

Macierz układu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}_1 = \mathbf{N}'$, $\quad$ $\mathbf{N}$ jest macierzą icydencji układu zrównoważonego o blokach niekompletnych z parametrami $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda$.

Twierdzenie

Jeżeli istnieje układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = 2k-1,\ b = \frac{2\lambda(2k-1)}{k},\ r = 2\lambda,\ k,\ \lambda$ i macierzą incydencji $\mathbf{N}$, to sprężynowy układ wagowy o macierzy układu

(i) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1}),\quad g > 0,$

lub

(ii) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2\mathbf{G} = \sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1}),$

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbf{N}$ jest macierzą incydencji układu zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = b = 4t + 3, r = k = 2(t + 1)$, $\lambda = t + 1,\ 4t + 3$ jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej, to

(i) jeśli $n = b + 1$, to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{'} \\ \mathbf{x}^{'} \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

(ii) jeśli $n = b + 2$, to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{'} \\ \mathbf{x}^{'} \\ \mathbf{z}^{'} \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbf{N}$ jest macierzą incydencji układu zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = 4t+1,\ b = 2(4t+1), r = 2(2t+1)$, $k = \lambda = 2t+1,\ 4t+1$ jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej, to

(i) jeśli $n = b+1$, to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

(ii) jeśli $n = b+2$, to $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbf{N}$ jest macierzą incydencji układu zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = t^2,\ b = 2t^2, r = t^2 + 1,\ k = \lambda = 0,5(t^2 + 1)$, t jest liczbą pierwszą, to

(i) jeśli $n = b + 1$, to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$

z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

(ii) jeśli $n = b + 2$, to to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$

z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Jeżeli v jest liczbą parzystą, to regularny D-optymalny sprężynowy układ wagowy z macierzą

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$ lub $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$ nie istnieje.

Układ częściowo zrównoważony z dwoma klasami partnerów

v liczba obiektów

b liczba bloków

k wielkość bloku

r liczba powtórzeń

każdy obiekt ma dokładnie λ_q $q-$tych partnerów, $q = 1, 2$

Dwa obiekty, które są swoimi $q-$tymi partnerami występują razem w λ_q blokach.

Parametry układu: $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$

Układ o grupach podzielnych

Jest to układ częściowo zrównoważony z dwoma klasami partnerów, w którym $v = ms$ obiektów można podzielić na m grup po s różnych obiektów.
Obiekty należące do tej samej grupy są swoimi pierwszymi partnerami, a obiekty należące do różnych grup są swoimi drugimi partnerami.

$$(s-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 = r(k-1)$$

Parametry układu: $v,\ b,\ r,\ k,\ \lambda_1,\ \lambda_2$

Macierz układu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$$

gdzie $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}'$,

$\mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2$ macierze icydencji układów o grupach podzielnych z parametrami $v,\ b_i,\ r_i,\ k_i,\ \lambda_{1i},\ \lambda_{2i},\ i = 1, 2$, oraz

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22} = \lambda.$$

Twierdzenie

Niech p będzie liczbą parzystą. Jeżeli istnieją jest macierzą incydencji $\mathbf{N}_1$ oraz $\mathbf{N}_2$ układów o grupach podzielnych z tymi samymi schematami partnerstwa i z parametrami $v,\ b_i, r_i,\ k_i,\ \lambda_{1i},\ \lambda_{2i},\ i = 1, 2$, oraz warunki

$$r_1 + r_2 = 2\lambda \qquad\qquad b_1 + b_2 = \frac{2(v+1)(r_1+r_2)}{v+2}$$

są spełnione, to sprężynowy układ wagowy z macierzą układu

(i) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{'} \\ \mathbf{x}^{'} \end{bmatrix}$ i z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

lub

(ii) X= $\begin{bmatrix} \mathbf{N}^{'} \\ \mathbf{x}^{'} \\ \mathbf{z}^{'} \end{bmatrix}$ i z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Niech $v = 6$ oraz niech $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ będą macierzami incydencji układów o grupach podzielnych z takim samym schematem partnerstwa, $\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22}$ z parametrami $b_1 = 3,\ r_1 = 2,\ k_1 = 4,\ \lambda_{11} = 2,\ \lambda_{21} = 1$ oraz $b_2 = 4,\ r_2 = 2,$ $k_2 = 3,\ \lambda_{12} = 0,\ \lambda_{22} = 1.$

Jeśli $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2]'$, to

(i) jeśli $n = b_1 + b_2 + 1,$ to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{x} \end{bmatrix}'$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1}),$

(ii) jeśli $n = b_1 + b_2 + 2,$ to to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{bmatrix}'$ z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1}),$

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Niech $v = 10$ oraz niech $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ będą macierzami incydencji układów o grupach podzielnych z takim samym schematem partnerstwa, $\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22}$ z parametrami $b_1 = 10,\ r_1 = k_1 = \lambda_{11} = 6,$ $\lambda_{21} = 3$ oraz $b_2 = 12,\ r_2 = 6,\ k_2 = 5,\ \lambda_{11} = 0,\ \lambda_{22} = 3.$

Jeśli $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2]^{'}$, to

(i) jeśli $n = b_1 + b_2 + 1$, to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} \end{array}\right]^{'}$
z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

(ii) jeśli $n = b_1 + b_2 + 2$, to to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array}\right]^{'}$
z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Twierdzenie

Niech $v = 14$ oraz niech $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ będą macierzami incydencji układów o grupach podzielnych z takim samym schematem partnerstwa, $\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{21} + \lambda_{22}$ z parametrami $b_1 = 14,\ r_1 = k_1 = \lambda_{11} = 8,$ $\lambda_{21} = 4$ oraz $b_2 = 16,\ r_2 = 8,\ k_2 = 7,\ \lambda_{12} = 0,\ \lambda_{22} = 4.$

Jeśli $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2]^{'}$, to

(i) jeśli $n = b_1 + b_2 + 1$, to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} \end{array} \right]^{'}$
z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g^{-1})$,

(ii) jeśli $n = b_1 + b_2 + 2$, to to sprężynowy układ wagowy $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_1^{'} & \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array} \right]^{'}$
z macierzą wariancji $\sigma^2 \mathrm{diag}(1, ..., 1, g_1^{-1}, g_2^{-1})$,

jest regularnym układem D-optymalnym.

Przykład 1

Niech $n = 11,\ p = 6$. Wtedy $b = 10 = n - 1$. Układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = 5,\ b = 10,\ r = 6,\ k = 3,\ \lambda = 3$ z macierzą

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\mathbf{X}_1 = \mathbf{N}^{'}$ oraz $\mathbf{x}^{'} = [1\ 1\ 1\ 0\ 0]$, to

$$\mathbf{X}^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

jest regularnym D-optymalnym sprężynowym układem wagowym.

Przykład 2

Niech $n = 9,\ p = 6$. Wtedy $b_1 + b_2 = 7 = n - 2$. Układy zrównoważone o grupach podzielnych z takim samym schematem partnerstwa z parametrami
$v = 6,\ b_1 = 3,\ r_1 = 2,\ k_1 = 4,\ \lambda_{11} = 2,\ \lambda_{21} = 1$ oraz
$v = 6,\ b_2 = 4,\ r_2 = 2,\ k_2 = 3,\ \lambda_{12} = 0,\ \lambda_{22} = 1$
dane poprzez macierze incydencji $\mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2$ z takim samym schematem partnerstwa dla $m = 3,\ s = 2$, gdzie

$$\mathbf{N}_1^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N}_2^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

Przykład 2 cd.

Jeśli $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{N}_1\ \mathbf{N}_2]^{'}$, $\mathbf{x}^{'} = [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$ oraz $\mathbf{z}^{'} = [0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0]$, to

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

jest regularnym D-optymalnym sprężynowym układem wagowym.

References

Banerjee K.S. (1975). Weighing Designs for Chemistry, Medicine, Economics, Operations Research, Statistics. Marcel Dekker Inc., New York.

Ceranka B., Katulska K. (1994). Constructions of the optimum chemical balance weighing design with non-homogeneity of the variances of errors. In: Advances in Statistical Software 4, Editor: F. Faulbaum, Stuttgard-Jena-New York: Gustav Fisher, 189-196.

Clatworthy W.H. (1973). Tables of two-associate-class partially balanced designs. NBS Applied Mathematics Series 63.

Gail Z., Kiefer J. (1980). D-optimum weighing designs. Ann. Statistics 8, 1293- 1306.

Gail Z., Kiefer J. (1982). Construction methods D-optimum weighing designs when $n \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$. Ann. Statistics 10: 502-510.

References

Katulska K., Przybył K. (2007). On certain D-optimal spring balance weighing designs. Journal of Statistical Theory and Practice 1, 393-404.

Neubauer M.G., Watkins W., Zeitlin J. (1998). Notes on D-optimal designs. Linear Algebra ans its Applications, 280, 109-127.

Pukelsheim F. (1993). Optimal design of experiment. John Willey and Sons, New York.

Raghavarao D. (1971) Constructions and Combinatorial Problems in designs of Experiments. John Wiley Inc., New York.

Raghavarao D., Padgett L.V. (2005). Block designs. Analysis, Combinatorics and Applications. Series of Applied Mathematics 17, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.