Uogólniony indeks Hirscha a dwupróbkowe testy dla rodziny rozkładów Pareto II rodzaju

Marek Gągolewski [1,2], Przemysław Grzegorzewski [2,1]

{gagolews,pgrzeg}@ibspan.waw.pl

*XXXV Konferencja **Statystyka Matematyczna***

Wisła, 7–11 grudnia 2009 r.

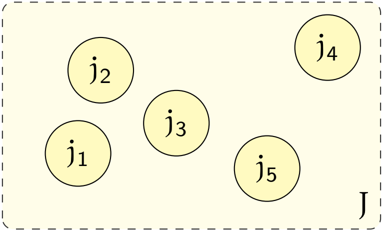
[1] Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

[2] Wydział Matematyki
i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Plan referatu

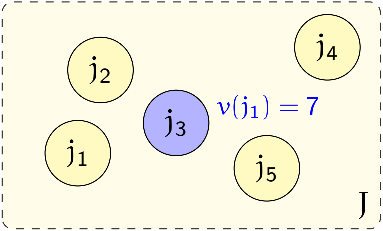
- Ogólny problem oceny twórców
- Wskaźniki bibliometryczne
- Problem oceny w interpretacji statystycznej
- κ-pozycje i ich estymacja
- Testy do porównywania dwóch prób
- Podsumowanie i problemy otwarte

Problem oceny twórców



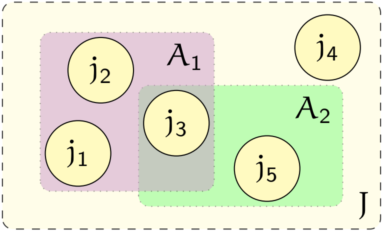
Przeliczalny zbiór **jednostek** (dzieł, produktów): $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$.

Problem oceny twórców



Przeliczalny zbiór **jednostek** (dzieł, produktów): $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$.
Funkcja oceny jednostek $v : J \to [0, \infty)$.

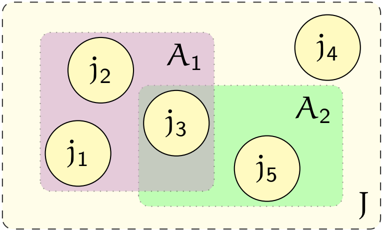
Problem oceny twórców



Przeliczalny zbiór **jednostek** (dzieł, produktów): $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$.
Funkcja oceny jednostek $\nu : J \to [0, \infty)$.
Zbiór twórców (autorów, producentów) $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$
— pewna rodzina podzbiorów J: $(A_1, \ldots, A_m \subseteq J)$.

Modelem opisywanej rzeczywistości jest trójka $(J, \mathcal{A}, \nu)$.

Problem oceny twórców



Przeliczalny zbiór **jednostek** (dzieł, produktów): $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$.
Funkcja oceny jednostek $v : J \to [0, \infty)$.
Zbiór twórców (autorów, producentów) $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$
— pewna rodzina podzbiorów J: $(A_1, \ldots, A_m \subseteq J)$.

Modelem opisywanej rzeczywistości jest trójka $(J, \mathcal{A}, v)$.

1.
   - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — pracownicy naukowi,
   - v — liczba cytowań,
2.
   - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — instytucje naukowe,
   - v — punkty z listy czasopism punktowanych MNiSW,
3.
   - J — strony internetowe,
   - $\mathcal{A}$ — portale (serwisy WWW),
   - v — liczba odwiedzin,
4.
   - J — dzieła sztuki,
   - $\mathcal{A}$ — artyści,
   - v — cena dzieła na aukcji.

1.
   - $\mathcal{J}$ — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — pracownicy naukowi,
   - v — liczba cytowań,
2.
   - $\mathcal{J}$ — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — instytucje naukowe,
   - v — punkty z listy czasopism punktowanych MNiSW,
3.
   - $\mathcal{J}$ — strony internetowe,
   - $\mathcal{A}$ — portale (serwisy WWW),
   - v — liczba odwiedzin,
4.
   - $\mathcal{J}$ — dzieła sztuki,
   - $\mathcal{A}$ — artyści,
   - v — cena dzieła na aukcji.

1. - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — pracownicy naukowi,
   - ν — liczba cytowań,
2. - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — instytucje naukowe,
   - ν — punkty z listy czasopism punktowanych MNiSW,
3. - J — strony internetowe,
   - $\mathcal{A}$ — portale (serwisy WWW),
   - ν — liczba odwiedzin,
4. - J — dzieła sztuki,
   - $\mathcal{A}$ — artyści,
   - ν — cena dzieła na aukcji.

1. - $\mathbb{J}$ — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — pracownicy naukowi,
   - v — liczba cytowań,
2. - $\mathbb{J}$ — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — instytucje naukowe,
   - v — punkty z listy czasopism punktowanych MNiSW,
3. - $\mathbb{J}$ — strony internetowe,
   - $\mathcal{A}$ — portale (serwisy WWW),
   - v — liczba odwiedzin,
4. - $\mathbb{J}$ — dzieła sztuki,
   - $\mathcal{A}$ — artyści,
   - v — cena dzieła na aukcji.

1. - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — pracownicy naukowi,
   - v — liczba cytowań,
2. - J — artykuły w recenzowanych czasopismach,
   - $\mathcal{A}$ — instytucje naukowe,
   - v — punkty z listy czasopism punktowanych MNiSW,
3. - J — strony internetowe,
   - $\mathcal{A}$ — portale (serwisy WWW),
   - v — liczba odwiedzin,
4. - J — dzieła sztuki,
   - $\mathcal{A}$ — artyści,
   - v — cena dzieła na aukcji.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathrm{J}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**” twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \ldots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathbb{J}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**” twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \dots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathbb{J}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**” twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \ldots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathbb{J}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**" twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \ldots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathcal{J}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**” twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \ldots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Problem

Na podstawie informacji zawartych w $(\mathcal{I}, \mathcal{A}, \nu)$ dokonać „**oceny**” twórców z $\mathcal{A}$.

Co oceniać?

- jakość wytworów
- produktywność

Rozpatrujemy twórców cechujących się tą samą produktywnością.

$\omega^{(n)} : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ jest **funkcją agregującą**, jeśli spełnia następujące warunki (zob. Grabisch i in., 2009):

- $\omega^{(n)}(0, \ldots, 0) = 0$,
- jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną.

Wskaźniki bibliometryczne

Przykładowe funkcje agregujące („wskaźniki bibliometryczne”):

- łączna liczba dzieł,
- średnia ocena jakości dzieł,
- indeks h (Hirsch, 2005)
- indeks g (Egghe, 2006)
- indeks w (Woeginger, 2008)
- indeksy „geometryczne” (Gągolewski, Grzegorzewski, 2009)
- ......

Wskaźniki bibliometryczne

Przykładowe funkcje agregujące („wskaźniki bibliometryczne”):

- łączna liczba dzieł,
- średnia ocena jakości dzieł,
- indeks $\mathtt{h}$ (Hirsch, 2005)
- indeks $\mathtt{g}$ (Egghe, 2006)
- indeks w (Woeginger, 2008)
- indeksy „geometryczne” (Gągolewski, Grzegorzewski, 2009)
- $\ldots\ldots$

Indeks Hirscha

„Autor n prac ma indeks o wartości h, jeżeli h jego prac otrzymało co najmniej h cytowań, a pozostałe z jego $n - h$ prac otrzymało co najwyżej h cytowań.”

Definicja

Indeksem Hirscha nazywamy funkcję $h : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ taką, że

$$h(x) = \begin{cases} \max\{i : x_{n+1-i:n} \geqslant i,\ \ i = 1, 2, \dots, n\} & \text{gdy } x_{n:n} > 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Np. $h(5, 4, 3, 3, 3, 1) = 3$.
Np. $h(10, 10, 10, 10, 0, 0, 0, 0) = 4$.

Indeks Hirscha

„Autor n prac ma indeks o wartości h, jeżeli h jego prac otrzymało co najmniej h cytowań, a pozostałe z jego $n-h$ prac otrzymało co najwyżej h cytowań."

Definicja

Indeksem Hirscha nazywamy funkcję $h : [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ taką, że

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \max\{i : x_{n+1-i:n} \geqslant i,\ i = 1,2,\dots,n\} & \text{gdy } x_{n:n} > 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Np. $h(5,4,3,3,3,1) = 3$.

Np. $h(10,10,10,10,0,0,0,0) = 4$.

Indeks Hirscha

„Autor n prac ma indeks o wartości h, jeżeli h jego prac otrzymało co najmniej h cytowań, a pozostałe z jego $n-h$ prac otrzymało co najwyżej h cytowań.”

Definicja

Indeksem Hirscha nazywamy funkcję $h : [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ taką, że

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \max\{i : x_{n+1-i:n} \geqslant i,\ \ i = 1,2,\ldots,n\} & \text{gdy } x_{n:n} > 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Np. $h(5,4,3,3,3,1) = 3$.
Np. $h(10,10,10,10,0,0,0,0) = 4$.

Interpretacja statystyczna

Rozważmy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. F, gdzie F – dystrybuanta ciągła, ściśle rosnąca na $[0, \infty)$, $F(x) = 0$ dla $x < 0$.

Interpretacja:
X_i — ocena jakości i-tego dzieła
F określa zdolności do wytwarzania dzieł o jakości właściwej każdemu twórcy

Przykład
Dla $P2(k, s)$, $k > 0, s \geqslant 1$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{s+x}\right)^k$$

dla $x > 0$ (Burrell, 2008; Glänzel, 2008).

Interpretacja statystyczna

Rozważmy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. F, gdzie F – dystrybuanta ciągła, ściśle rosnąca na $[0, \infty)$, $F(x) = 0$ dla $x < 0$.

Interpretacja:
X_i — ocena jakości i-tego dzieła
F określa zdolności do wytwarzania dzieł o jakości właściwej każdemu twórcy

Przykład
Dla $P2(k, s)$, $k > 0$, $s \geqslant 1$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{s + x}\right)^k$$

dla $x > 0$ (Burrell, 2008; Glänzel, 2008).

Interpretacja statystyczna

Rozważmy $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. F, gdzie F – dystrybuanta ciągła, ściśle rosnąca na $[0, \infty)$, $F(x) = 0$ dla $x < 0$.

Interpretacja:
X_i — ocena jakości i-tego dzieła
F określa zdolności do wytwarzania dzieł o jakości właściwej każdemu twórcy

Przykład
Dla $P2(k, s), k > 0, s \geqslant 1$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{s+x}\right)^k$$

dla $x > 0$ (Burrell, 2008; Glänzel, 2008).

Definicja

Komplementarną funkcją kwantylową zmiennej losowej o dystrybuancie F nazywamy funkcję $K:(0,1)\to[0,\infty)$ daną wzorem

$$K(x)=(1-F(x))^{-1}.$$

Oczywiście $K(x)=R^{-1}(x)$.

Definicja

Funkcją kontrolną nazywamy dowolną funkcję $\kappa:[0,1]\to\mathbb{R}$, która jest ciągła, niemalejąca i taka, że $\kappa(0)\leqslant 0$, $\kappa(1)>0$.

Definicja

Komplementarną funkcją kwantylową zmiennej losowej o dystrybuancie F nazywamy funkcję $K : (0, 1) \to [0, \infty)$ daną wzorem

$$K(x) = (1 - F(x))^{-1}.$$

Oczywiście $K(x) = R^{-1}(x)$.

Definicja

Funkcją kontrolną nazywamy dowolną funkcję $\kappa : [0, 1] \to \mathbb{R}$, która jest ciągła, niemalejąca i taka, że $\kappa(0) \leqslant 0$, $\kappa(1) > 0$.

Definicja

Komplementarną funkcją kwantylową zmiennej losowej o dystrybuancie F nazywamy funkcję $K : (0,1) \to [0,\infty)$ daną wzorem

$$K(x) = (1 - F(x))^{-1}.$$

Oczywiście $K(x) = R^{-1}(x)$.

Definicja

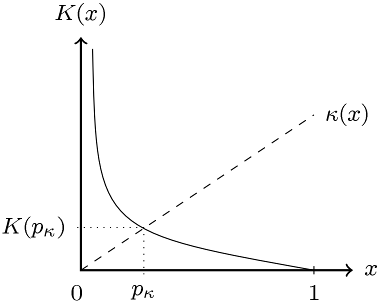
Funkcją kontrolną nazywamy dowolną funkcję $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$, która jest ciągła, niemalejąca i taka, że $\kappa(0) \leqslant 0$, $\kappa(1) > 0$.

κ-pozycje

Definicja

κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F przy funkcji kontrolnej κ nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$\kappa(\mathfrak{p}_\kappa) = \mathrm{K}(\mathfrak{p}_\kappa).$$



Równoważne definicje κ-pozycji:

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $p_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - p_\kappa = F(\kappa(p_\kappa)) \overset{\text{ozn.}}{=} F \circ \kappa(p_\kappa).$$

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $p_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - p_\kappa = P(\kappa^{-1}(X_i) \leqslant p_\kappa).$$

Uwaga

Przy podanych założeniach κ-pozycja zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

Równoważne definicje κ-pozycji:

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1-\mathfrak{p}_\kappa = F(\kappa(\mathfrak{p}_\kappa)) \overset{\text{ozn.}}{=} F\circ\kappa(\mathfrak{p}_\kappa).$$

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1-\mathfrak{p}_\kappa = P(\kappa^{-1}(X_i) \leqslant \mathfrak{p}_\kappa).$$

Uwaga

Przy podanych założeniach κ-pozycja zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

Równoważne definicje κ-pozycji:

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - \mathfrak{p}_\kappa = F(\kappa(\mathfrak{p}_\kappa)) \overset{\text{ozn.}}{=} F \circ \kappa(\mathfrak{p}_\kappa).$$

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - \mathfrak{p}_\kappa = P(\kappa^{-1}(X_i) \leqslant \mathfrak{p}_\kappa).$$

Uwaga

Przy podanych założeniach κ-pozycja zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

Równoważne definicje κ-pozycji:

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - \mathfrak{p}_\kappa = F(\kappa(\mathfrak{p}_\kappa)) \overset{\text{ozn.}}{=} F \circ \kappa(\mathfrak{p}_\kappa).$$

- κ-pozycją dla rozkładu danego dystrybuantą F nazywamy liczbę $\mathfrak{p}_\kappa \in (0,1)$ będącą rozwiązaniem równania

$$1 - \mathfrak{p}_\kappa = P(\kappa^{-1}(X_i) \leqslant \mathfrak{p}_\kappa).$$

Uwaga

Przy podanych założeniach κ-pozycja zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie.

Przykład
Dla $P2(1,1)$ i $\kappa(x) = x$ zachodzi

$$\mathfrak{p}_\kappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \simeq 0{,}618034.$$

Przykład
Dla dowolnego F i $\kappa \equiv F^{-1}$ zachodzi

$$\mathfrak{p}_\kappa = 0{,}5.$$

Przykład

Dla $P2(1,1)$ i $\kappa(x) = x$ zachodzi

$$\mathfrak{p}_\kappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \simeq 0{,}618034.$$

Przykład

Dla dowolnego F i $\kappa \equiv F^{-1}$ zachodzi

$$\mathfrak{p}_\kappa = 0{,}5.$$

Estymacja κ-pozycji

Definicja

Dyskretnym κ-indeksem pozycyjnym nazywamy statystykę

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\kappa(\mathbf{X}) &= \frac{1}{n}\arg\max_{i=0,\ldots,n}\{X_{n-i+1:n} \geqslant \kappa(i/n)\}\\ &= \frac{1}{n}\arg\max_{i=0,\ldots,n}\{\#\{X_k : X_k \geqslant \kappa(i/n)\} \geqslant i\}.\end{aligned}$$

Estymacja κ-pozycji

Definicja

Dyskretnym κ-indeksem pozycyjnym nazywamy statystykę

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\kappa(\mathbf{X}) &= \frac{1}{n}\arg\max_{i=0,\ldots,n}\{X_{n-i+1:n}\geqslant\kappa(i/n)\}\\ &= \frac{1}{n}\arg\max_{i=0,\ldots,n}\{\#\{X_k : X_k\geqslant\kappa(i/n)\}\geqslant i\}.\end{aligned}$$

Estymacja κ-pozycji

Lemat 1

Rozkład $\widehat{p}_\kappa$ *opisany jest dystrybuantą*

$$\begin{aligned} F_{\widehat{p}_\kappa}(p) &= 1 - \sum_{i=\lfloor pn+1 \rfloor}^{n} \binom{n}{i} \left[1 - F \circ \kappa\left(\frac{\lfloor pn+1 \rfloor}{n}\right)\right]^{i} \left[F \circ \kappa\left(\frac{\lfloor pn+1 \rfloor}{n}\right)\right]^{n-i} \\ &= I\left(F \circ \kappa\left(\frac{\lfloor pn+1 \rfloor}{n}\right); n - \lfloor pn \rfloor, \lfloor pn \rfloor + 1\right) \end{aligned}$$

dla $p \in (0,1)$, *przy czym* $I(p; a, b)$ *oznacza regularyzowaną niekompletną funkcję beta, natomiast* $\lfloor x \rfloor = \max\{i \in \mathbb{Z} : i \leqslant x\}$.

Estymacja κ-pozycji

Stwierdzenie 2

$\widehat{\mathfrak{p}}_\kappa$ *jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym* $\mathfrak{p}_\kappa$ *oraz* $\operatorname{Var}\widehat{\mathfrak{p}}_\kappa \to 0$.

Lemat 3

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *i.i.d.* F. *Wówczas dla funkcji kontrolnej* $\kappa(x) = xn$ *zachodzi*

$$h(\mathbf{X}) = n\,\widehat{\mathfrak{p}}_\kappa(\mathbf{X}) = \max\{i = 0, \ldots, n : X_{n-i+1:n} \geqslant i\}.$$

Estymacja κ-pozycji

Stwierdzenie 2

$\widehat{p}_\kappa$ *jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym* $\mathfrak{p}_\kappa$ *oraz* $\operatorname{Var}\widehat{p}_\kappa \to 0$.

Lemat 3

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *i.i.d.* F. *Wówczas dla funkcji kontrolnej* $\kappa(x) = xn$ *zachodzi*

$$h(\mathbf{X}) = n\,\widehat{p}_\kappa(\mathbf{X}) = \max\{i = 0, \dots, n : X_{n-i+1:n} \geqslant i\}.$$

Estymacja κ-pozycji

Stwierdzenie 4 (O aproksymacji)

Jeśli $F \circ \kappa$ *jest funkcją analityczną w punkcie* $\mathfrak{p}_\kappa$ *i dla każdego* p *w dowolnie małym otoczeniu* $\mathfrak{p}_\kappa$ *zachodzi* $(p - \mathfrak{p}_\kappa)^2 (F \circ \kappa)''(p) \simeq 0$ *oraz* $(p - \mathfrak{p}_\kappa)\,\delta\,(1 - 2\mathfrak{p}_\kappa + (p - \mathfrak{p}_\kappa)\,\delta) \simeq 0$, *to dla* $n \to \infty$

$$F_{\widehat{p}_\kappa}(p) \simeq \Phi\left(\frac{p - p_\kappa}{\sqrt{\frac{p_\kappa(1-p_\kappa)}{n\,(1+\delta)^2}}}\right),$$

gdzie $\delta := (F \circ \kappa)'(\mathfrak{p}_\kappa) = f(\kappa(\mathfrak{p}_\kappa))\,\kappa'(\mathfrak{p}_\kappa)$, *a* Φ *jest dystrybuantą* $N(0,1)$.

Testy do porównywania dwóch prób

$\mathbf{X}$ — n-elementowa próba i.i.d. F.
$\mathbf{Y}$ — n-elementowa próba i.i.d. G.

Jesteśmy zainteresowani konstrukcją (nieparametrycznego) testu φ na poziomie istotności α do weryfikacji

$$H_0 : F = G$$

względem

$$K : F \succ G.$$

Testy do porównywania dwóch prób

$\mathbf{X}$ — n-elementowa próba i.i.d. F.
$\mathbf{Y}$ — n-elementowa próba i.i.d. G.

Jesteśmy zainteresowani konstrukcją (nieparametrycznego) testu φ na poziomie istotności α do weryfikacji

$$H_0 : F = G$$

względem

$$K : F \succ G.$$

Dla $F = G$ i dostatecznie dużych n mamy

$$T = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2_{\kappa,F}}} \left(\widehat{p}_\kappa(\mathbf{X}) - \widehat{p}_\kappa(\mathbf{Y})\right) \sim N(0,1),$$

gdzie

$$\sigma^2_{\kappa,F} = \frac{\mathfrak{p}_{\kappa,F}(1 - \mathfrak{p}_{\kappa,F})}{(1 + \delta_{\kappa,F})^2}$$

oraz $\delta_{\kappa,F} := (F \circ \kappa)'(\mathfrak{p}_{\kappa,F})$.

H_0 odrzucamy, gdy $T > z_{1-\alpha}$.

Dalej F — dystrybuanta $P2(k_1, s)$, G — dystrybuanta $P2(k_2, s)$.
$s \geqslant 1$ — ustalone (znane).

Mamy $k_1 < k_2 \Rightarrow F \succ G$.

$\kappa(x) = nx$ („indeks Hirscha").

Dalej F — dystrybuanta $P2(k_1, s)$, G — dystrybuanta $P2(k_2, s)$.
$s \geqslant 1$ — ustalone (znane).

Mamy $k_1 < k_2 \Rightarrow F \succ G$.

$\kappa(x) = nx$ („indeks Hirscha").

Dalej F — dystrybuanta $P2(k_1, s)$, G — dystrybuanta $P2(k_2, s)$.
$s \geqslant 1$ — ustalone (znane).

Mamy $k_1 < k_2 \Rightarrow F \succ G$.

$\kappa(x) = nx$ („indeks Hirscha").

Testy do porównania:

1. Test Manna-Whitney'a-Wilcoxona,
2. Test Kołmogorowa-Smirnowa,
3. Test parametryczny oparty na ilorazie wiarogodności. Statystyka testowa

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + X_i) - n \ln s}{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + Y_i) - n \ln s} \overset{H_0}{\sim} F^{[2n,2n]}.$$

H_0 odrzucamy, gdy $T > \mathcal{F}_{1-\alpha}^{[2n,2n]}$.

Testy do porównania:

1. Test Manna-Whitney'a-Wilcoxona,
2. Test Kołmogorowa-Smirnowa,
3. Test parametryczny oparty na ilorazie wiarogodności. Statystyka testowa

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + X_i) - n \ln s}{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + Y_i) - n \ln s} \overset{H_0}{\sim} F^{[2n,2n]}.$$

H_0 odrzucamy, gdy $T > \mathcal{F}_{1-\alpha}^{[2n,2n]}$.

Testy do porównania:

1. Test Manna-Whitney'a-Wilcoxona,
2. Test Kołmogorowa-Smirnowa,
3. Test parametryczny oparty na ilorazie wiarogodności. Statystyka testowa

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + X_i) - n \ln s}{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + Y_i) - n \ln s} \overset{H_0}{\sim} F^{[2n,2n]}.$$

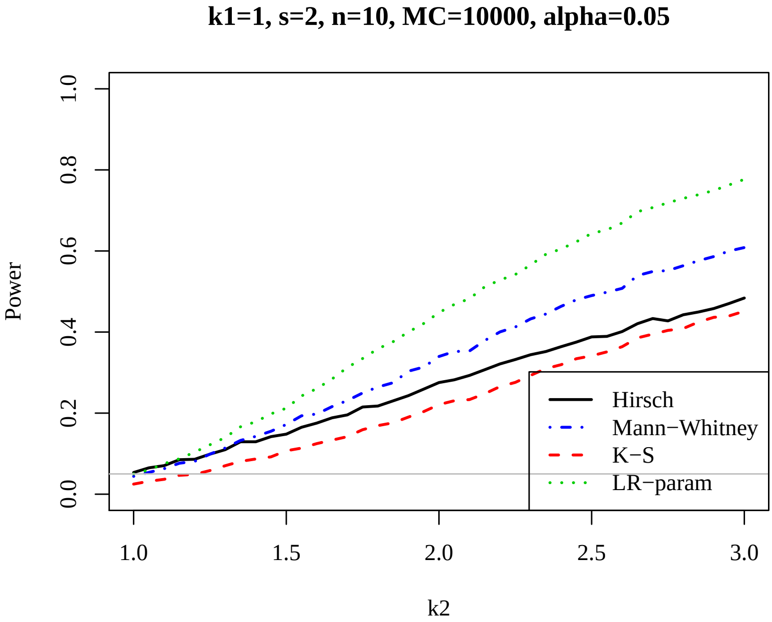
H_0 odrzucamy, gdy $T > \mathcal{F}_{1-\alpha}^{[2n,2n]}$.

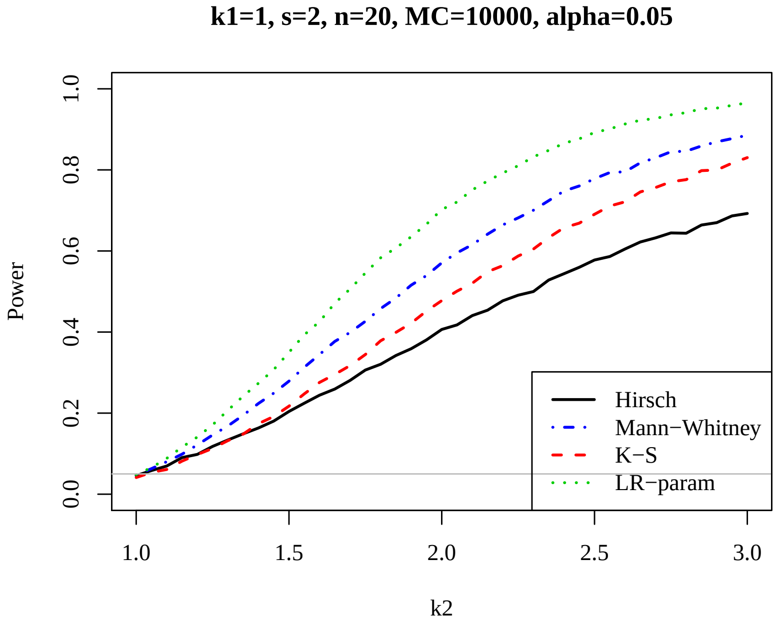
Testy do porównania:

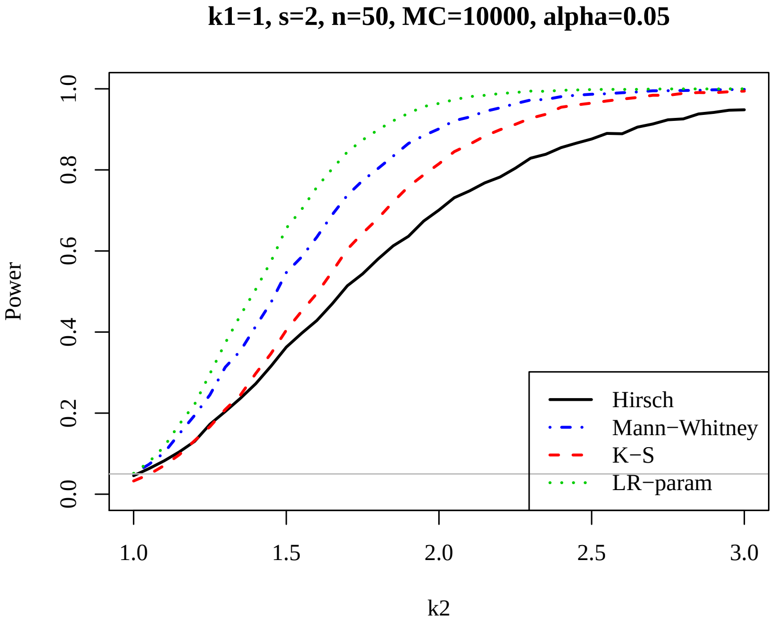
1. Test Manna-Whitney'a-Wilcoxona,
2. Test Kołmogorowa-Smirnowa,
3. Test parametryczny oparty na ilorazie wiarogodności. Statystyka testowa

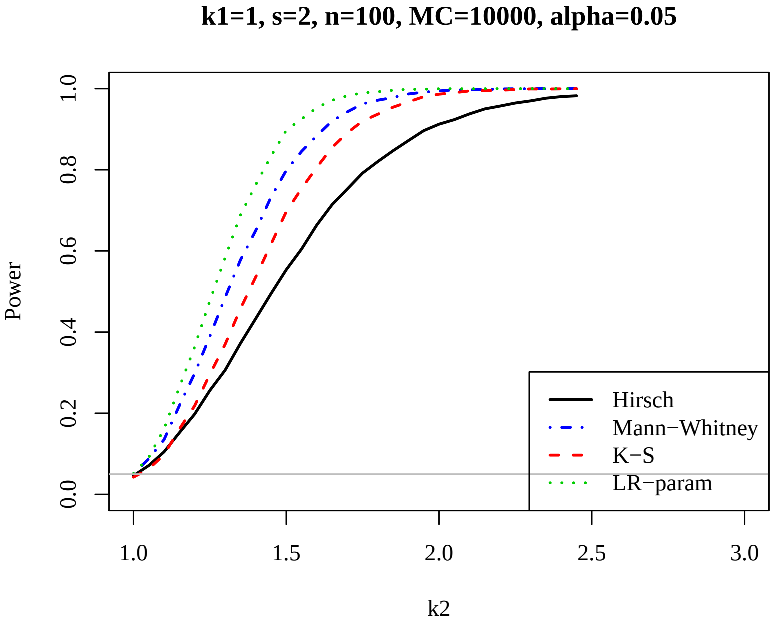
$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + X_i) - n\ln s}{\sum_{i=1}^{n} \ln\,(s + Y_i) - n\ln s} \overset{H_0}{\sim} F^{[2n,2n]}.$$

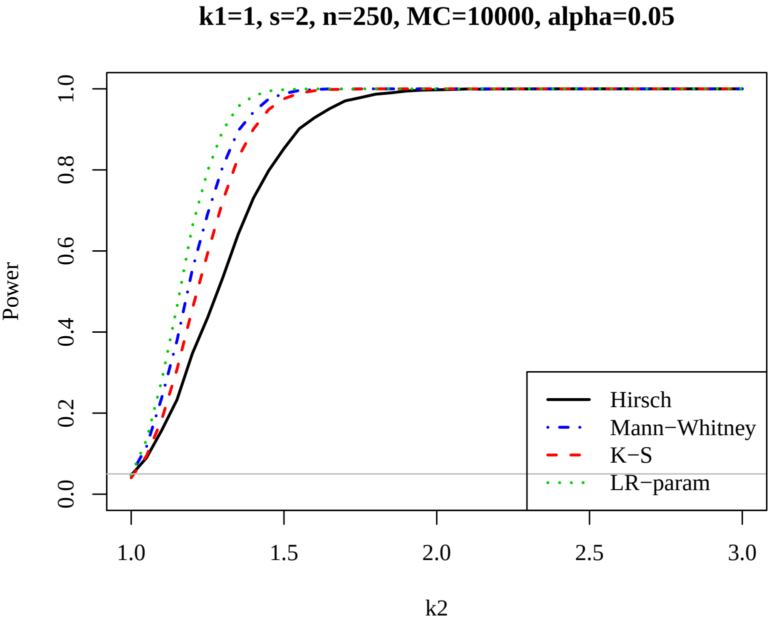
H_0 odrzucamy, gdy $T > \mathcal{F}_{1-\alpha}^{[2n,2n]}$.


k1=1, s=2, n=10, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param

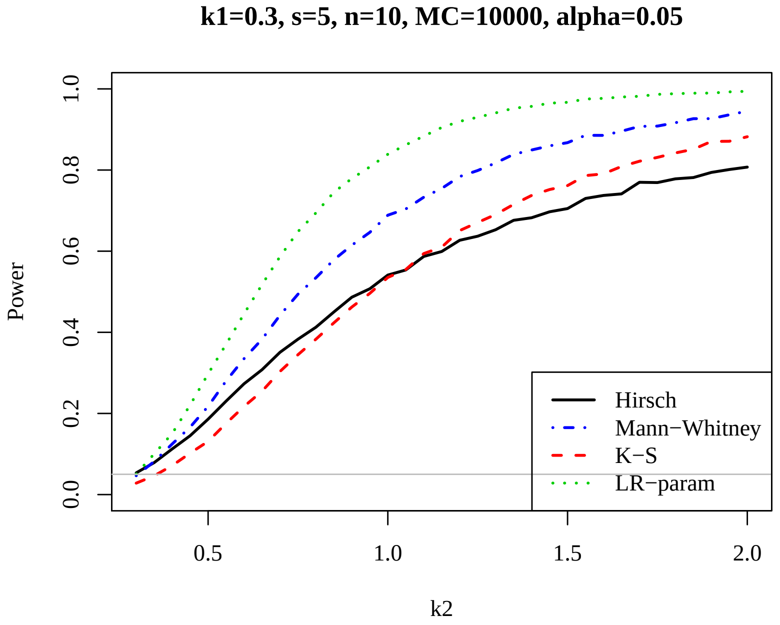

k1=1, s=2, n=20, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param

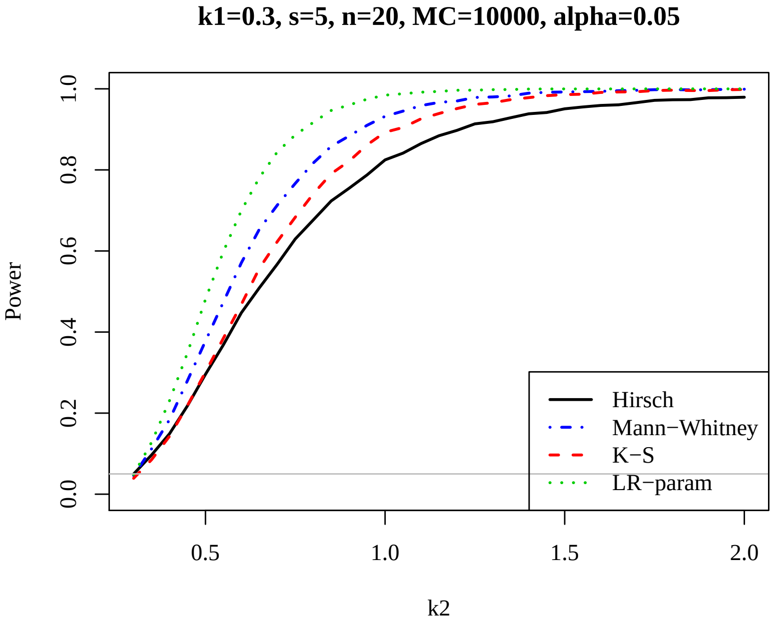

k1=1, s=2, n=50, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param

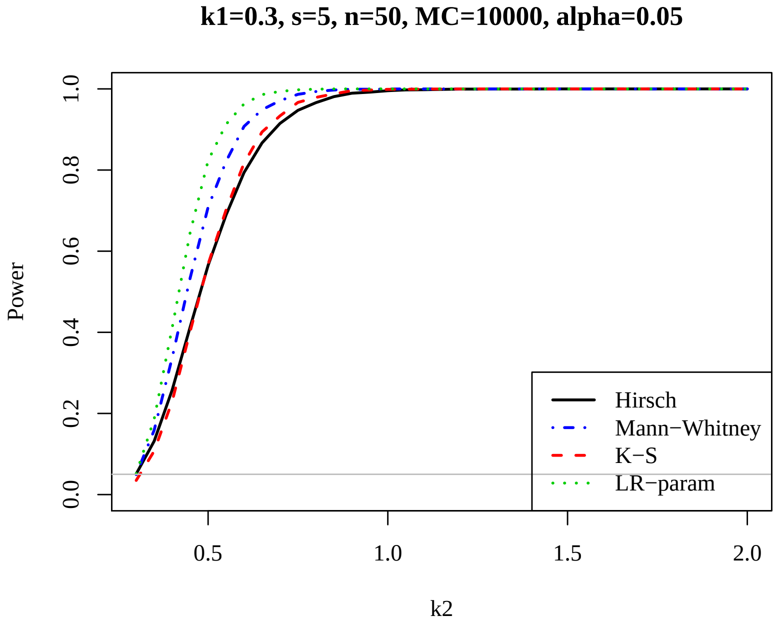

k1=1, s=2, n=100, MC=10000, alpha=0.05
Power
k2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param

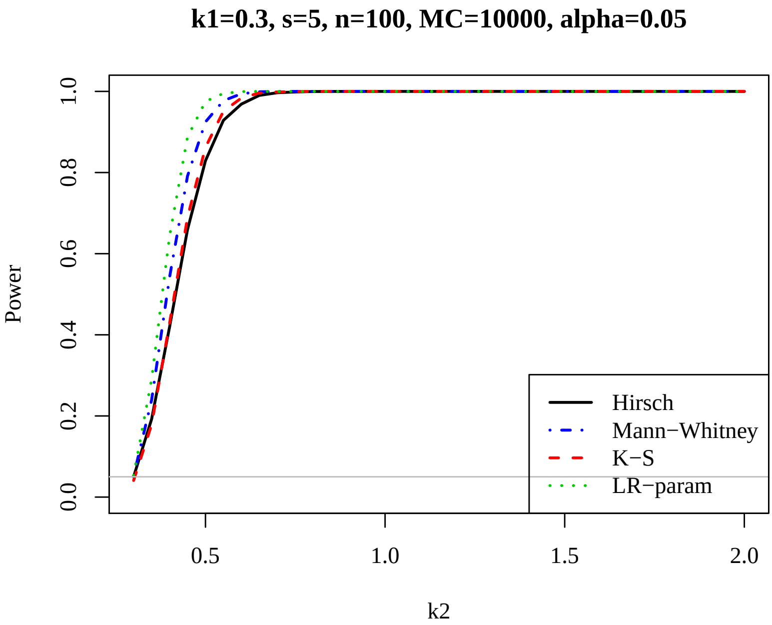


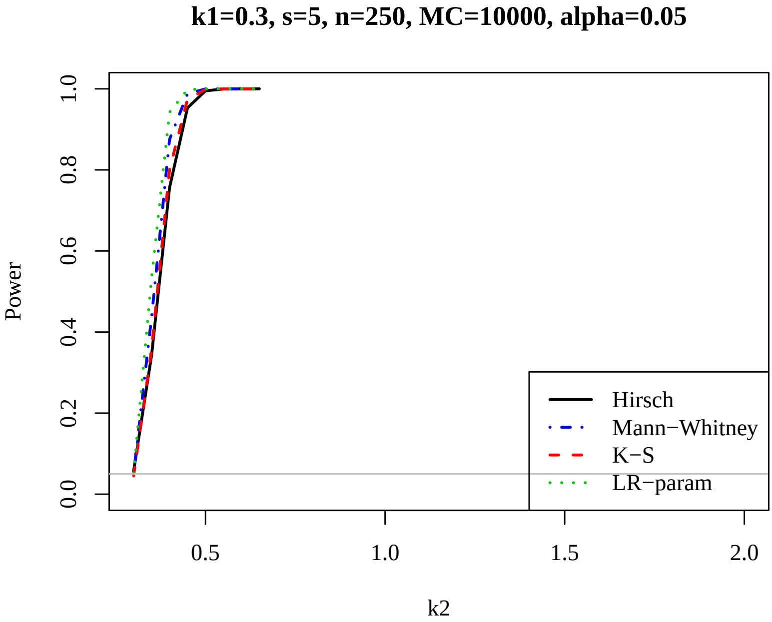
k1=1, s=2, n=250, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
k2
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param


k1=0.3, s=5, n=10, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param


k1=0.3, s=5, n=20, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param


k1=0.3, s=5, n=50, MC=10000, alpha=0.05
Power
k2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param


k1=0.3, s=5, n=100, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param


k1=0.3, s=5, n=250, MC=10000, alpha=0.05
Power
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
k2
Hirsch
Mann−Whitney
K−S
LR−param

Podsumowanie i problemy otwarte

- Jakie własności statystyczne miałyby estymatory κ-pozycji zbudowane dla innych funkcji kontrolnych κ?
- Czy testy budowane na tych estymatorach miałyby lepszą moc niż test wykorzystujący estymator rozważany w tej pracy?
- Dla jakiej funkcji kontrolnej (być może z określonej rodziny funkcji) otrzymalibyśmy test o maksymalnej mocy?
- ......

Podsumowanie i problemy otwarte

- Jakie własności statystyczne miałyby estymatory κ-pozycji zbudowane dla innych funkcji kontrolnych κ?
- Czy testy budowane na tych estymatorach miałyby lepszą moc niż test wykorzystujący estymator rozważany w tej pracy?
- Dla jakiej funkcji kontrolnej (być może z określonej rodziny funkcji) otrzymalibyśmy test o maksymalnej mocy?
- ……

Podsumowanie i problemy otwarte

- Jakie własności statystyczne miałyby estymatory κ-pozycji zbudowane dla innych funkcji kontrolnych κ?
- Czy testy budowane na tych estymatorach miałyby lepszą moc niż test wykorzystujący estymator rozważany w tej pracy?
- Dla jakiej funkcji kontrolnej (być może z określonej rodziny funkcji) otrzymalibyśmy test o maksymalnej mocy?
- ......

Podsumowanie i problemy otwarte

- Jakie własności statystyczne miałyby estymatory κ-pozycji zbudowane dla innych funkcji kontrolnych κ?
- Czy testy budowane na tych estymatorach miałyby lepszą moc niż test wykorzystujący estymator rozważany w tej pracy?
- Dla jakiej funkcji kontrolnej (być może z określonej rodziny funkcji) otrzymalibyśmy test o maksymalnej mocy?
- ......

Podsumowanie i problemy otwarte

- Jakie własności statystyczne miałyby estymatory κ-pozycji zbudowane dla innych funkcji kontrolnych κ?
- Czy testy budowane na tych estymatorach miałyby lepszą moc niż test wykorzystujący estymator rozważany w tej pracy?
- Dla jakiej funkcji kontrolnej (być może z określonej rodziny funkcji) otrzymalibyśmy test o maksymalnej mocy?
- ......

Dziękujemy za uwagę.

Literatura

- Q. Burrell. On the $\mathfrak{h}$-index, the size of the Hirsch core and Jin's $\mathcal{A}$-index. *Journal of Informetrics* 1, 170–177.
- Q. Burrell (2008). Extending Lotkaian informetrics. *Information Processing & Management* 44, 1794–1807.
- A. DasGupta (2008). *Asymptotic theory of statistics and probability*. Springer Verlag, New York.
- W. Glänzel (2008). On some new bibliometric applications of statistics related to the $\mathfrak{h}$-index. *Scientometrics* 77(1), 187–196.
- L. Egghe (2006). Theory and practise of the $\mathfrak{g}$-index. *Scientometrics* 69(1), 131–152.

- M. Gągolewski, P. Grzegorzewski (2009). A geometric approach to the construction of scientific impact indices. *Scientometrics* 81(3), 617–634.
- M. Grabisch, E. Pap, J. Marichal, R. Mesiar (2009). *Aggregation Functions*, Cambridge.
- J. E. Hirsch (2005). An index to quantify individual's scientific research output. *PNAS* 102(46), 16569–16572.
- R. J. Hyndman, Y. Fan (1996). Sample quantiles in statistical packages. *American Statistician*, 50(4), 361–365.
- G. J. Woeginger (2008). An axiomatic characterization of the Hirsch-index. *Mathematical Social Sciences* 56(2), 224–232.