Własności porządkowe w modelu proporcjonalnych szans

Magdalena Frąszczak

Wisła, 8 grudnia 2009

Oznaczenia

- $X \sim F$, $Y \sim G$ zmienne losowe o gęstościach f i g odpowiednio;
- $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geqslant u\}$, $u \in (0,1)$ - funkcja kwantylowa;
- $\frac{d}{du}F^{-1}(u) = 1/fF^{-1}(u)$ – gęstość kwantylowa (ang. *quantile - density function*) rozkładu F;
- $fF^{-1}(u) = L(u)(1-u)^p$, gdzie $L(u)$ jest funkcją wolno zmieniającą się w 1;
- $r_F(u) = f(u)/\bar{F}(u)$ – intensywność awarii.
- $F_w(u) = \frac{1}{E[w(X)]}\int_{-\infty}^{u} w(s)dF(s)$ – rozkład ważony wyznaczony przez rozkład F z funkcja wagową $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Porządki stochastyczne

- porządek ilorazu wiarogodności
  $F \leqslant_{\mathrm{lr}} G \equiv g(x)/f(x)$ jest rosnący;
- porządek hazardowy
  $F \leqslant_{\mathrm{hr}} G \equiv \overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ jest rosnący;
- porządek odwrotny hazardowy
  $F \leqslant_{\mathrm{rh}} G \equiv G(x)/F(x)$ jest rosnący;
- porządek dyspersyjny
  $F \leqslant_{\mathrm{disp}} G \Leftrightarrow fF^{-1}(u)/gG^{-1}(u) \geqslant 1; \quad u \in (0,1);$
- porządek wypukły
  $F \leqslant_{\mathrm{c}} G \Leftrightarrow fF^{-1}(u)/gG^{-1}(u)$ rosnący.

Klasy rozkładów czasu życia

- F jest IFR (DFR), gdy funkcja intensywności awarii r_F jest rosnąca (malejąca).
- F jest IFRA (DFRA), gdy funkcja $-\log \bar{F}$ jest gwiaździsta (antygwiaździsta) na S_F (tzn. $-\log \bar{F}(t)/t$ jest rosnąca (malejąca)).
- F jest NBU(NWU), gdy $\bar{F}(t+s) \leqslant (\geqslant) \bar{F}(t)\bar{F}(s)$ dla wszystkich $t, s, t+s \in [0, \infty)$.
- F jest IRFR (DRFR), gdy funkcja $\log F$ jest wypukła (wklęsła) na S_F.

Model proporcjonalnych szans (Clayton (1974))

Funkcja szans

$$\theta_F(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$$

Model proporcjonalnych szans (Clayton (1974))

Funkcja szans

$$\theta_F(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$$

Definicja

Mówimy, że zmienne losowe X i Y spełniają model proporcjonalnych szans, ze stałą proporcjonalności $\alpha > 0$, gdy

$$\theta_G(t) = \alpha\theta_F(t).$$

Czyli $\frac{\bar{G}(t)}{G(t)} = \alpha\frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$, a stąd $\bar{G}(t) = \frac{\alpha\bar{F}(t)}{1-(1-\alpha)\bar{F}(t)}$

Rodzina rozkładów z parametrem nachylenia α (Marshall i Olkin (1997))

$$\mathcal{G} = \left\{ G_\alpha :\ \bar{G}_\alpha(t) = \frac{\alpha \bar{F}(t)}{1 - \bar{\alpha}\bar{F}(t)};\ t \in \mathbf{R}, \alpha > 0, \bar{\alpha} = 1 - \alpha \right\}$$

Rodzina rozkładów z parametrem nachylenia α (Marshall i Olkin (1997))

$$\mathcal{G} = \left\{ G_\alpha : \bar{G}_\alpha(t) = \frac{\alpha \bar{F}(t)}{1 - \bar{\alpha}\bar{F}(t)};\ t \in \mathbf{R}, \alpha > 0, \bar{\alpha} = 1 - \alpha \right\}$$

$\bar{G}_\alpha = \bar{F}$, gdy $\alpha = 1$.

Rodzina rozkładów z parametrem nachylenia α (Marshall i Olkin (1997))

$$\mathcal{G} = \left\{ G_\alpha \colon \bar{G}_\alpha(t) = \frac{\alpha \bar{F}(t)}{1 - \bar{\alpha}\bar{F}(t)};\ t \in \mathbf{R}, \alpha > 0, \bar{\alpha} = 1 - \alpha \right\}$$

$\bar{G}_\alpha = \bar{F}$, gdy $\alpha = 1$.

$$g_\alpha(t) = \frac{\alpha f(t)}{(1-\bar{\alpha}\bar{F}(t))^2}, \quad t \in \mathbf{R},$$
$$g_\alpha G_\alpha^{-1}(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - t + t\alpha)^2 fF^{-1}\left(\frac{t\alpha}{1-t+t\alpha}\right), \quad t \in (0,1).$$

Uporządkowania dyspersyjne oraz wypukłe w rodzinie $\mathcal{G}$

Twierdzenie 1.

Niech $fF^{-1}(t) = c(1-t)^p$, $t \in (0,1)$. Wówczas:

(i) jeżeli $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ i $p \geqslant 1$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{disp}} G_\beta$;

(ii) jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$ i $p > 2$ lub $0 < \beta < \alpha < \infty$ i $p < 2$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{c}} G_\beta$.

Uporządkowania dyspersyjne oraz wypukłe w rodzinie $\mathcal{G}$

Twierdzenie 1.

Niech $fF^{-1}(t) = c(1-t)^p$, $t \in (0,1)$. Wówczas:

(i) jeżeli $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ i $p \geqslant 1$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{disp}} G_\beta$;

(ii) jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$ i $p > 2$ lub $0 < \beta < \alpha < \infty$ i $p < 2$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{c}} G_\beta$.

Twierdzenie 2.

Niech $fF^{-1}(t) = c\left[\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]^b (1-t)^p$, $t \in (0,1)$.

(i) Jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$, $p \geqslant 2$ oraz $b > 0$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{c}} G_\beta$.

(ii) Jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$, $p \geqslant 2$, oraz $b \in (0,1)$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{disp}} G_\beta$.

Uporządkowania dyspersyjne oraz wypukłe w rodzinie $\mathcal{G}$

Fakt

Niech F_i - absolutnie ciągłe, takie że $F_i(0) = 0$,
$G_{i\alpha} = 1 - \alpha\bar{F}_i(t)/[1 - \alpha\bar{F}_i(t)]$, $i = 1, 2$. Wówczas:

(i) jeżeli $F_1 \leqslant_{\mathrm{disp}} F_2$, to $G_{1,\alpha} \leqslant_{\mathrm{disp}} G_{2,\alpha}$;

(ii) jeżeli $F_1 \leqslant_{\mathrm{c}} F_2$, to $G_{1,\alpha} \leqslant_{\mathrm{c}} G_{2,\alpha}$.

Uporządkowania ilorazu wiarogodności, hazardowe oraz odwrotne hazardowe w rodzinie $\mathcal{G}$

Twierdzenie 3.

Jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{lr}} G_\beta$.

Uporządkowania ilorazu wiarogodności, hazardowe oraz odwrotne hazardowe w rodzinie $\mathcal{G}$

Twierdzenie 3.

Jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{lr}} G_\beta$.

Wniosek 1.

(i) Jeżeli $0 < \alpha < 1$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{lr}} F$.

(ii) Jeżeli $\alpha > 1$, to $F \leqslant_{\mathrm{lr}} G_\alpha$.

Wniosek 2.

(i) Jeżeli $0 < \alpha < \beta < \infty$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{hr}} G_\beta$ oraz $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{rh}} G_\beta$.

(ii) Jeżeli $0 < \alpha < 1$, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{hr}} F$ oraz $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{rh}} F$.

(iii) Jeżeli $\alpha > 1$, to $F \leqslant_{\mathrm{hr}} G_\alpha$ oraz $F \leqslant_{\mathrm{rh}} G_\alpha$.

Rozkład G_α jako rozkład ważony

G_α może być rozważany jako rozkład ważony rozkładu F z funkcją wagową $w(u) = 1/[1 - \bar{\alpha}\bar{F}(u)]^2$.
Funkcja w jest funkcją monotoniczną.

Wniosek 3.

Niech F_1 i F_2 będą absolutnie ciągłe oraz $\bar{G}_{i,\alpha}(t) = \alpha\bar{F}_i(t)/[1 - \alpha\bar{F}_i(t)]$, $i = 1, 2$. Wówczas $F_1 \leqslant_{\mathrm{lr}} F_2 \Leftrightarrow G_{1,\alpha} \leqslant_{\mathrm{lr}} G_{2,\alpha}$.

Kirmani i Gupta(2001) pokazali, że

(i) Jeżeli F jest IFR (DFR) oraz $1 < \alpha < \infty$ ($0 < \alpha < 1$), to G_α jest IFR (DFR).

(ii) Jeżeli F jest IFRA (DFRA) oraz $1 < \alpha < \infty$ ($0 < \alpha < 1$), to G_α jest IFRA (DFRA)

(iii) Jeżeli F jest NBU (NWU) oraz $1 < \alpha < \infty$ ($0 < \alpha < 1$), to G_α jest NBU (NWU)

Niech F będzie absolutnie ciągłym rozkładem, takim że $F(0) = 0$. Jeżeli F jest IRFR (DRFR) oraz $1 < \alpha < \infty$ $(0 < \alpha < 1)$, to G_α jest IRFR (DRFR).

(i) Jeżeli $1 < \alpha < \infty$ $(0 < \alpha < 1)$ oraz $g_\alpha/\bar{F}$ jest malejąca (rosnąca), to G_α jest DFR (IFR).
(ii) Jeżeli $1 < \alpha < \infty$ $(0 < \alpha < 1)$ oraz g_α/F jest malejąca (rosnąca), to G_α jest DRFR (IRFR).
(iii) Jeżeli $g_\alpha/\bar{F}$ jest malejąca, to G_α jest DRFR.
(iv) Jeżeli g_α/F jest rosnąca, to G_α jest IFR.

Znanym faktem jest, że

- Jeśli $F \leqslant_{\mathrm{hr}} G$ oraz F lub G jest DFR, to $F \leqslant_{\mathrm{disp}} G$.
- Jeśli $F \leqslant_{\mathrm{rh}} G$ oraz F lub G jest IRFR, to $F \leqslant_{\mathrm{disp}} G$.

A stąd

Wniosek 4.

(i) Jeżeli $0 < \alpha < \beta < 1$ oraz F jest DFR, to $G_\alpha \leqslant_{\mathrm{disp}} G_\beta$.

(ii) Jeżeli $1 < \alpha < \beta < \infty$ oraz F jest IRFR, to $G_\beta \leqslant_{\mathrm{disp}} G_\alpha$.

Literatura

- Clayton, D.G., (1974), *Some odds ratio statistics for the analysis of ordered categorical data*, Biometrika **61**, 525–531.
- Frąszczak, M., *Some properties of the proportional odds model.*
- Kirmani, S.N.U.A. i Gupta, R.C. (2001), *On the proportional odds model in survival analysis*, Ann. Inst. Statist. Math. **53**, 203–216.
- Marshall, A.W. i Olkin, I., (1997), *A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families*, Biometrika **84**, 641–652.

Przykład 1. Niech $f(t) = 3(1-t)^2$, wówczas $fF^{-1}(t) = 3(1-t)^{2/3}$, a stąd

$$g_\alpha G_\alpha^{-1}(t) = \frac{3}{\alpha}(1-t+\alpha t)^{\frac{4}{3}}(1-t)^{\frac{2}{3}}.$$

Niech $\alpha = 3$, $\beta = 2$, wówczas funkcja $\varphi(t) = \frac{g_2 G_2^{-1}}{g_3 G_3^{-1}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1+t}{1+2t}\right)^{4/3}$ jest malejąca, a stąd $G_3 \leqslant_c G_2$, natomiast $\varphi(0.25) = 1.17$, a $\varphi(0.8) = 0.91$, czyli nie ma uporządkowania dyspersyjnego w rodzinie rozkładów $\mathcal{G}$.

Przykład 2.
Niech $\bar{F}(t) = \exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}$, $t \geqslant 0$, $\beta > 1$. Ponieważ $\beta > 1$, więc F jest IFR. Gdy $1 < \alpha < \infty$, G_{α} jest IFR.
Niech teraz $0 < \alpha < 1$. Wówczas
$r_{\alpha}(t) = \lambda^{\beta}\beta t^{\beta-1}/(1 - \bar{\alpha}\exp\{-\lambda t\}^{\beta})$ jest rosnąca dla początkowych i końcowych wartości t, natomiast może istnieć przedział, w którym jest malejąca, stąd G_{α} nie jest IFR ani DFR.

Przykład 2.
Niech $\bar{F}(t) = \exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}$, $t \geqslant 0$, $\beta > 1$. Ponieważ $\beta > 1$, więc F jest IFR. Gdy $1 < \alpha < \infty$, G_{α} jest IFR.
Niech teraz $0 < \alpha < 1$. Wówczas
$r_{\alpha}(t) = \lambda^{\beta}\beta t^{\beta-1}/(1 - \bar{\alpha}\exp\{-\lambda t\}^{\beta})$ jest rosnąca dla początkowych i końcowych wartości t, natomiast może istnieć przedział, w którym jest malejąca, stąd G_{α} nie jest IFR ani DFR.

Przykład 3.
Niech $\bar{F}(t) = \exp\{-e^{t+\theta}\}$. F jest IFR. Niech $0 < \alpha < 1$. Wówczas ogon rozkładu z rodziny $\mathcal{G}$ jest postaci
$\bar{G}_{\alpha}(t) = \alpha\exp\{-e^{t+\theta}\}/(1 - \bar{\alpha}\exp\{e^{t+\theta}\})$, a stąd
$r_{\alpha}(t) = [\exp\{t - \theta\}]/[1 - \bar{\alpha}\exp\{e^{t-\theta}\}]$ jest rosnąca dla każdego t, zatem G_{α} jest IFR.