Estymowalność i estymatory największej wiarogodności w rozszerzonym modelu krzywych wzrostu

Katarzyna Filipiak[1] Dietrich von Rosen[2]

[1]Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

[2]Center of Biostochastics
Swedish University of Agricultural Sciences, Uppsala

Wisła 2009

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\beta + \varepsilon$$

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\beta + \varepsilon$$

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ - wektor obserwacji

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\beta + \varepsilon$$

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ - wektor obserwacji
- $\beta \in \mathbb{R}_t$ - wektor efektów głównych

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ - wektor obserwacji
- $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_t$ - wektor efektów głównych
- $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_n$ - wektor błędów losowych, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$

Model jednowymiarowy

Eksperyment

- t - liczba obiektów
- n - liczba jednostek eksperymentalnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ - wektor obserwacji
- $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_t$ - wektor efektów głównych
- $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_n$ - wektor błędów losowych, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n\times t}$ - macierz układu dla efektów głównych

Obserwacje

$t,\ n$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obserwacje

t, n $\quad$ p - liczba cech

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obserwacje

t, n p - liczba cech

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obserwacje

t, n $\quad$ p - liczba cech

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \ldots$$

Obserwacje

t, n p - liczba cech

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obserwacje

$t, \ n$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obserwacje

$t,\ n$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$t,\ n,\ p$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{np} \end{pmatrix}$$

Model wielowymiarowy (MANOVA)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{E}$$

Model wielowymiarowy (MANOVA)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji

Model wielowymiarowy (MANOVA)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych

Model wielowymiarowy (MANOVA)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz błędów losowych,
  $$\mathbf{E} \sim N_{n,p}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n\right)$$

Model wielowymiarowy (MANOVA)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AB} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n\times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t\times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n\times p}$ - macierz błędów losowych,
  $$\mathbf{E} \sim N_{n,p}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n\right)$$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n\times t}$ - macierz układu dla efektów głównych

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz błędów losowych,
$$\mathbf{E} \sim N_{n,p}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n)$$

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n\times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t\times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n\times p}$ - macierz błędów losowych,
$$\mathbf{E} \sim N_{n,p}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n\right)$$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n\times t}$ - macierz układu dla obiektów

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz błędów losowych,
  $$\mathbf{E} \sim N_{n,p}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n\right)$$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n \times t}$ - macierz układu dla obiektów
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{n \times t}$ - macierz układu dla cech

Model wielowymiarowy (GCM)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ABC} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz obserwacji
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{t \times p}$ - macierz efektów głównych
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{n \times p}$ - macierz błędów losowych,
  $$\mathbf{E} \sim N_{n,p}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n)$$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n \times t}$ - macierz układu dla obiektów
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{n \times t}$ - macierz układu dla cech

Potthoff, Roy, 1964

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1')$$

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1')$$

Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1')$$

Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009

MODEL II

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1')$$

Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009

MODEL II

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}_3) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}_2) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}_1)$$

Rozszerzony Model Krzywych Wzrostu

MODEL I

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1')$$

Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009

MODEL II

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}_3) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}_2) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}_1)$$

Kollo, von Rosen, 2005

Przeparametryzowanie

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \qquad \Longrightarrow$$

Przeparametryzowanie

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \qquad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_1'), \qquad \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_2')$$

Przeparametryzowanie

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \qquad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_1'), \qquad \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_2')$$

Niech $\quad \mathbf{\Theta}_1 = (\mathbf{\Theta}_{11} : \mathbf{\Theta}_{12} : \mathbf{\Theta}_{13}), \qquad \mathbf{\Theta}_2 = (\mathbf{\Theta}_{21} : \mathbf{\Theta}_{22})$

Przeparametryzowanie

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \qquad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_1'), \qquad \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') = \mathcal{R}(\mathbf{C}_3') \boxplus \mathcal{R}(\mathbf{H}_2')$$

Niech $\quad \mathbf{\Theta}_1 = (\mathbf{\Theta}_{11} : \mathbf{\Theta}_{12} : \mathbf{\Theta}_{13}), \qquad \mathbf{\Theta}_2 = (\mathbf{\Theta}_{21} : \mathbf{\Theta}_{22})$

Wówczas,

MODEL I

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (\mathbf{A}_1 : \mathbf{A}_2 : \mathbf{A}_3)(\mathbf{\Theta}_{11}' : \mathbf{\Theta}_{21}' : \mathbf{B}_3')'\mathbf{C}_3 \\ &\quad + (\mathbf{A}_1 : \mathbf{A}_2)(\mathbf{\Theta}_{12}' : \mathbf{\Theta}_{22}')'\mathbf{H}_2 + \mathbf{A}_1\mathbf{\Theta}_{13}\mathbf{H}_1 + \mathbf{E} \end{aligned}$$

jest modelem typu II.

MLE w Modelu I

Twierdzenie 1

W MODELU I estymatory największej wiarogodności nieznanych parametrów to:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{B}}_1 &= (\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^-\mathbf{A}_1'(\mathbf{Y}-\mathbf{A}_2\widehat{\mathbf{B}}_2\mathbf{C}_2-\mathbf{A}_3\widehat{\mathbf{B}}_3\mathbf{C}_3)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{C}_1')^-,\\
\widehat{\mathbf{B}}_2 &= (\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2)^-\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}(\mathbf{Y}-\mathbf{A}_3\widehat{\mathbf{B}}_3\mathbf{C}_3)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{C}_2'(\mathbf{C}_2\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{C}_2')^-,\\
\widehat{\mathbf{B}}_3 &= (\mathbf{A}_3'\mathbf{Q}_{(A_1:A_2)}\mathbf{A}_3)^-\mathbf{A}_3'\mathbf{Q}_{(A_1:A_2)}\mathbf{Y}\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{C}_3'(\mathbf{C}_3\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{C}_3')^-,\\
n\widehat{\mathbf{\Sigma}} &= \mathbf{S}_3+\mathbf{Q}_{C_1';S_3^{-1}}\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{A_1}\mathbf{Y}\mathbf{Q}'_{C_1';S_3^{-1}},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Q}_{(A_1:A_2:A_3)}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{S}_2=\mathbf{S}_1+\mathbf{Q}_{C_3';S_1^{-1}}\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{Q_{(A_1:A_2)}A_3}\mathbf{Y}\mathbf{Q}'_{C_3';S_1^{-1}},\\
\mathbf{S}_3 &= \mathbf{S}_2+\mathbf{Q}_{C_2';S_2^{-1}}\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{Q_{A_1}A_2}\mathbf{Y}\mathbf{Q}'_{C_2';S_2^{-1}}.
\end{aligned}$$

MLE w Modelu II

Twierdzenie 2 (Kollo, von Rosen, 2005)

W MODELU II estymatory największej wiarogodności nieznanych parametrów to:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{B}}_1 &= (\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^-\mathbf{A}_1'(\mathbf{Y}-\mathbf{A}_2\widehat{\mathbf{B}}_2\mathbf{C}_2-\mathbf{A}_3\widehat{\mathbf{B}}_3\mathbf{C}_3)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{C}_1')^-,\\
\widehat{\mathbf{B}}_2 &= (\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_2)^-\mathbf{A}_2'(\mathbf{Y}-\mathbf{A}_3\widehat{\mathbf{B}}_3\mathbf{C}_3)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{U}_1\mathbf{C}_2'(\mathbf{C}_2\mathbf{U}_1'\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{U}_1\mathbf{C}_2')^-,\\
\widehat{\mathbf{B}}_3 &= (\mathbf{A}_3'\mathbf{A}_3)^-\mathbf{A}_3'\mathbf{Y}\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{P}_3\mathbf{C}_3'(\mathbf{C}_3\mathbf{P}_3'\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{P}_3\mathbf{C}_3')^-,\\
n\widehat{\Sigma} &= \mathbf{S}_3+\mathbf{P}_4\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{A_3}\mathbf{Y}\mathbf{P}_4',
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}_1=\mathbf{Y}'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{S}_2=\mathbf{S}_1+\mathbf{U}_1\mathbf{Y}'\mathbf{P}_{A_1}\mathbf{Q}_{A_2}\mathbf{P}_{A_1}\mathbf{Y}\mathbf{U}_1',\\
&\mathbf{S}_3=\mathbf{S}_2+\mathbf{P}_3\mathbf{Y}',\\
&\mathbf{P}_i=\mathbf{U}_{i-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{U}_1,\ i=3,4, \qquad \mathbf{U}_j=\mathbf{Q}_{P_jC_j';S_j^{-1}},\ j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

Estymowalność w Modelu I

Twierdzenie 3

Liniowe funkcje $\sum_j \mathbf{K}_j \mathbf{B}_i \mathbf{L}_j$, $i = 1, 2, 3$, są estymowalne w Modelu I wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1 \mathbf{Q}_{C_2'} \otimes \mathbf{A}_1'\right) + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_{C_2'} \mathbf{Q}_{C_3'} \otimes \mathbf{A}_1' \mathbf{Q}_{A_2}\right) + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_{C_3'} \otimes \mathbf{A}_1' \mathbf{Q}_{(A_2:A_3)}\right), \quad \text{dla } i = 1,$$

$$\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_2 \mathbf{Q}_{C_3'} \otimes \mathbf{A}_2' \mathbf{Q}_{A_1}\right) + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_2 \mathbf{P}_{C_3'} \otimes \mathbf{A}_2' \mathbf{Q}_{(A_1:A_3)}\right), \quad \text{dla } i = 2,$$

$$\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_3 \otimes \mathbf{A}_3' \mathbf{Q}_{(A_1:A_2)}\right), \quad \text{dla } i = 3.$$

Estymowalność w Modelu II

Twierdzenie 4

Liniowe funkcje $\sum_j \mathbf{K}_j \mathbf{B}_i \mathbf{L}_j$, $i = 1, 2, 3$, są estymowalne w Modelu II wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) &\subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{A}_1'\mathbf{Q}_{A_2}\right) + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1\mathbf{Q}_{C_2'} \otimes \mathbf{A}_1'\mathbf{P}_{A_2}\mathbf{Q}_{A_3}\right) \\
&\quad + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_1\mathbf{Q}_{(C_2':C_3')} \otimes \mathbf{A}_1'\mathbf{P}_{A_3}\right), && \text{dla } i = 1, \\
\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) &\subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_2\mathbf{Q}_{C_1'} \otimes \mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_3}\right) + \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_2\mathbf{Q}_{(C_1':C_3)} \otimes \mathbf{A}_2'\mathbf{P}_{A_3}\right), \\
& && \text{for } i = 2, \\
\mathcal{R}\left(\sum_j \mathbf{L}_j \otimes \mathbf{K}_j'\right) &\subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{C}_3\mathbf{Q}_{(C_1':C_2')} \otimes \mathbf{A}_3'\right), && \text{for } i = 3.
\end{aligned}$$

Momenty pierwszego rzędu

Twierdzenie 5

Załóżmy, że w Modelu I estymatory ML funkcji $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, są jednoznaczne. Wówczas $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, są nieobciążonymi estymatorami $\mathbf{K}\mathbf{B}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$.

Twierdzenie 6 (Kollo, von Rosen, 2005)

Załóżmy, że w Modelu II estymatory ML funkcji $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, są jednoznaczne. Wówczas $\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, są nieobciążonymi estymatorami $\mathbf{K}\mathbf{B}_i\mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$.

Momenty drugiego rzędu - Model I

Twierdzenie 7

If γ_1 exists

$$D[\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_3\mathbf{L}] = \gamma_1 \mathbf{L}'(\mathbf{C}_3\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C}_3')^{-}\mathbf{L} \otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_3'\mathbf{Q}_{(A_1:A_2)}\mathbf{A}_3)^{-}\mathbf{K}'.$$

If γ_1, γ_2 and γ_3 exist

$$\begin{aligned} D[\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_2\mathbf{L}] &= \gamma_1 \mathbf{L}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_3'}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{L} \otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{(A_1:A_3)}\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{K}' + \\ &+ \mathbf{L}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\left((1+\gamma_2)\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_2'} + (\gamma_3-\gamma_2-\gamma_1)\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_3'}\right)\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{L} \\ &\qquad \otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{K}'. \end{aligned}$$

If γ_i, $i = 1,\ldots,8$, exist

$$\begin{aligned} D[\mathbf{K}\widehat{\mathbf{B}}_1\mathbf{L}] &= \gamma_1 \mathbf{L}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_3'}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{L} \otimes \\ &\otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1})\mathbf{A}_3(\mathbf{A}_3'\mathbf{Q}_{(A_1:A_2)}\mathbf{A}_3)^{-}\mathbf{A}_3' \\ &\quad \times (\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{A}_2')\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{K}' + \\ &+ \mathbf{L}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\left((1+\gamma_2)\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_2'} + (\gamma_3-\gamma_2-\gamma_1)\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_3'}\right)\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{L} \otimes \\ &\quad \otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1'(\mathbf{A}_2'\mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{K}' \\ &+ \mathbf{L}'\mathbf{F}\mathbf{L} \otimes \mathbf{K}(\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{K}', \end{aligned}$$

Momenty drugiego rzędu - Model I

Twierdzenie 7 - c.d.

gdzie

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\Big((1+\gamma_4)\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_1'} - \gamma_4\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_2'} + \gamma_4\gamma_5\gamma_6\mathbf{P}_{\Sigma^{-1/2}C_3'} + + \gamma_4\gamma_6\mathbf{P}_{Q_{\Sigma^{-1/2}C_3'}\Sigma^{-1/2}C_2'}\Big)\mathbf{\Sigma}^{1/2},$$

$$\gamma_1 = \frac{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2{:}A_3)-1}{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2{:}A_3)-p+\mathrm{rank}(C_3)-1}, \qquad \gamma_2 = \frac{p-\mathrm{rank}(C_2)}{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_2)-1},$$

$$\gamma_3 = \frac{(n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_3)-1)(p-\mathrm{rank}(C_2))}{(n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2{:}A_3)-p+\mathrm{rank}(C_3)-1)(n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_2)-1)},$$

$$\gamma_4 = \frac{p-\mathrm{rank}(C_1)}{n-\mathrm{rank}(A_1)-p+\mathrm{rank}(C_1)-1}, \qquad \gamma_5 = \frac{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_3)-1}{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2{:}A_3)-p+\mathrm{rank}(C_3)-1},$$

$$\gamma_6 = \frac{n-\mathrm{rank}(A_1)-p+\mathrm{rank}(C_2)-1}{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_2)-1}, \qquad \gamma_7 = \frac{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)}{n-\mathrm{rank}(A_1)},$$

$$\gamma_8 = \frac{n-\mathrm{rank}(A_1)-p+\mathrm{rank}(C_1)-1}{n-\mathrm{rank}(A_1{:}A_2)-p+\mathrm{rank}(C_1)-1}.$$

Optymalność

Model jednowymiarowy

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{1,d}\beta_1 + \mathbf{A}_{2,d}\beta_2 + \mathbf{A}_3\beta_3 + \varepsilon$$

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

Optymalność

Model jednowymiarowy

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{1,d}\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{A}_3\boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2'), \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_3')$$

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_3')$$

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_3')$$

Twierdzenie (Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009)

Poniższe stwierdzenia są równoważne:

(a) układ d^* jest optymalny w sensie Kiefera ze względu na grupę $\mathcal{H}$ w estymacji $\boldsymbol{\beta}_1$ w modelu jednowymiarowym;

(b) układ d^* jest optymalny w sensie Kiefera ze względu na grupę $\mathbf{I}_p \otimes \mathcal{H}$ w estymacji $\mathbf{B}_1$ w modelu wielowymiarowym z nieznaną $\boldsymbol{\Sigma}$.

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_3')$$

Optymalność

Model wielowymiarowy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{1,d}\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_{2,d}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_3 + \mathbf{E}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_2') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_1') \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{C}_3')$$

Twierdzenie (Filipiak, Markiewicz, Szczepańska, 2009)

Jeżeli układ d^* taki, że $\mathbf{A}_{1,d}'\mathbf{Q}_{A_3}\mathbf{A}_{2,d} = \mathbf{0}$ jest optymalny w sensie Kiefera ze względu na grupę $\mathcal{H}$ dla estymacji $\boldsymbol{\beta}_1$ w modelu jednowymiarowym bez efeku $\boldsymbol{\beta}_2$, to d^* jest optymalny w sensie Kiefera ze względu na grupę $\mathbf{I}_p \otimes \mathcal{H}$ dla estymacji $\mathbf{B}_1$ w modelu wielowymiarowym z nieznaną $\boldsymbol{\Sigma}$.

Wybrane pozycje literaturowe

- Filipiak, K. and D. von Rosen. Maximum likelihood estimation in the multivariate model of experimental designs. *Report no. 2009:7, Centre of Biostochastics. Swedish University of Agricultural Sciences*, 1-21.
- Filipiak, K., A. Markiewicz, and A. Szczepańska (2009). Optimal designs under a multivariate linear model with additional nuisance parameters. *Statist. Papers*, **50**, 761-778.
- Kollo, T. and D. von Rosen (2005). *Advanced Multivariate Statistics with Matrices*. Springer, Dordrecht.
- Potthof, R.F. and S.N. Roy (1964). A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for Growth Curve problems. *Biometrika*, **51**, 313–326.