O PEWNEJ REPREZENTACJI ROZKŁADÓW WAŻONYCH

Jarosław Bartoszewicz

Uniwersytet Wrocławski

Wprowadzenie

$X \sim F$ – zmienna losowa i jej rozkład;

f – gęstość, gdy istnieje;

S_F – nośnik rozkładu F – przedział;

$\overline{F} = 1 - F$ – funkcja przeżycia;

$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geqslant u\}$, $u \in (0, 1)$ – funkcja kwantylowa rozkładu F;

$F^{-1}(0)$, $F^{-1}(1)$ – lewy i prawy końce nośnika S_F;

$r_F(x) = f(x)/\overline{F}(x)$ – intensywność awarii rozkładu F;

$\check{r}_F(x) = f(x)/F(x)$ – odwrotna intensywność awarii rozkładu F

Niech $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją, dla której $0 < E[w(X)] < \infty$.
Taką funkcję będziemy nazywać *funkcją wagową*.

Definicja

Rozkład prawdopodobieństwa o dystrybuancie

$$F_w(x) =$$

$$= \frac{1}{E[w(X)]} \int_{-\infty}^{x} w(u) dF(u) = \frac{1}{E[w(X)]} \int_{0}^{F(x)} w(F^{-1}(z)) dz$$

nazywamy ważonym rozkładem zmiennej losowej X *z funkcją wagową* w*.*

Jeśli istnieje gęstość f, to

$$f_w(x) = \frac{w(x)f(x)}{E[w(X)]}$$

jest gęstością rozkładu F_w.
Gdy $F(0) = 0$ i $w(x) = x$, rozkład F_w nazywa się *obciążonym długością* (lub *obciążonym rozmiarem*) rozkładem zmiennej X i oznacza się przez $\hat{F}$ a jego gęstość przez $\hat{f}$, tzn.

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x udF(u), \qquad x \geqslant 0,$$

i

$$\hat{f}(x) = \frac{xf(x)}{E(X)}, \qquad x \geqslant 0.$$

Oznaczmy przez X_w i $\hat{X}$ zmienne losowe o rozkładach F_w i $\hat{F}$ odpowiednio: *ważoną wersję* i *obciążoną długością wersję* zmiennej losowej X, odpowiednio.

Rozkłady ważone wprowadził do statystyki R.A. Fisher.

Zastosowania statystyczne rozkładów ważonych:
demografia, ekologia: Rao (1974, 1985), Patil i Rao (1977, 1978);

teoria niezawodności (zachowanie klas rozkładów i porządków stochastycznych): Gupta i Keating (1986); Jain, Singh i Bagai (1989), Belzunce, Navarro, Ruiz i del Aguila (2004); Bartoszewicz i Skolimowska (2006); Błażej (2008); Misra, Gupta i Dhariyal (2008).

Główny wynik

Błażej (2008) udowodnił, że

$$F_w(x) = F^*(F(x)), \tag{1.1}$$

gdzie

$$F^*(u) = \frac{1}{E(w(X))} \int_0^u w(F^{-1}(z))dz$$

jest absolutnie ciągłym rozkładem na przedziale $[0, 1]$.

W szczególności, gdy w jest rosnąca lewostronnie ciągła,

$$F^*(u) = L_W(u),$$

a gdy w jest malejąca lewoostronnie ciągła,

$$F^*(u) = 1 - L_W(1 - u),$$

gdzie L_W is *krzywą Lorenza* zmiennej losowej $W = w(X)$ (Bartoszewicz i Skolimowska, 2006).
Korzystając z wyniku Błażeja (2008), otrzymujemy zależność między ważeniem a monotonicznymi przekształceniami.

Twierdzenie (1)

Niech $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *będzie funkcją wagową postaci* $w(x) = \phi(v(x))$, *gdzie* v *jest ściśle monotoniczna lewostronnie ciągła, a* ϕ *dowolną funkcją. Wówczas* $X_w =^{\mathrm{st}} v^{-1}(V_\phi)$ *lub równoważnie*

$$v(X_w) =^{\mathrm{st}} V_\phi,$$

gdzie $V = v(X)$, *a* V_ϕ *jest ważoną wersją zmiennej* V *z funkcją wagową* ϕ.

Dowód

Przypuśćmy, że v *jest rosnąca. Z (1.1) wynika, że rozkład* F^* *ma gęstość*

$$f^*(x) = \frac{w(F^{-1}(x))}{E[w(X)]} = \frac{\phi(v(F^{-1}(x)))}{E[w(X)]}.$$

Oznaczmy przez H *rozkład zmiennej* V*. Jest jasne, że* $H(x) = F(v^{-1}(x))$*. Niech* H_ϕ *będzie ważonym rozkładem zmiennej* V *z funkcją wagową* ϕ*. Zatem z (1.1) mamy*

$$H_\phi(x) = H^*(H(x)) = H^*(F(v^{-1}(x))), \tag{1.2}$$

gdzie H^* *jest absolutnie ciągłym rozkładem na* $[0, 1]$ *z gęstością*

$$h^*(u) = \frac{\phi(H^{-1}(u))}{E[\phi(V)]} =$$

$$\frac{\phi(v(F^{-1}(u))}{E[w(X)]} = f^*(u), \qquad u \in [0,1],$$

czyli $F^* = H^*$. Zatem z (1.2) otrzymujemy

$$P\{v^{-1}(V_\phi) \leqslant x\} = P\{V_\phi \leqslant v(x)\} =$$

$$H_\phi(v(x)) = H^*(F(x)) = F^*(F(x)) = P\{X_w \leqslant x\},$$

tzn. $X_w =^{\mathrm{st}} v^{-1}(V_\phi)$.

Dowód przebiega podobnie, gdy v jest malejąca.

W szczególności z Twierdzenia (1) wynika, że dla monotonicznej lewostronnie ciągłej w i obciążonej długością wersji $\hat{W}$ zmiennej losowej W mamy:

$$X_w =^{\mathrm{st}} w^{-1}(\hat{W}).$$

Widzimy, ze operacja ważenia zmiennej X może być dokonana w trzech krokach: najpierw przekształcamy X przy pomocy w, następnie przekształconą zmienną losową „obciążamy długością'', a w końcu na obciążoną długością zmienną działamy przekształceniem odwrotnym w^{-1}. Przypomina to mechanizm często spotykany w matematyce, np. operacje z zastosowaniem transformat całkowych Laplace'a czy Fouriera.

Zastosowania: własności rozkładu gamma

Przypomnienie

Niech S_F będzie przedziałem.

Rozkład F jest IFR (lub DFR), gdy $\log \overline{F}$ jest funkcją wklęsłą (lub wypukłą) na S_F.

Rozkład F o nośniku $S_F = [a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < \infty$, jest IRFR (ang. *increasing reversed failure rate*), gdy $\log F$ jest funkcją wypukłą na S_F.

Rozkład F jest DRFR (ang. *decreasing reversed failure rate*), gdy $\log F$ jest funkcją wklęsłą na S_F.

Wiadomo, że

$$DFR \subset DRFR \qquad \text{i} \qquad IRFR \subset IFR.$$

Łatwo udowodnić następujący lemat.

Lemat (1)

Jeżeli rozkład F zmiennej losowej X jest IFR (DFR), a v jest rosnacą wklęsłą (wypukłą) funkcją na S_F, to $v(X)$ ma rozkład IFR (DFR).

Rozpatrzmy zmienną losową Z o rozkładzie gamma z parametrem skali 1 i parametrem kształtu $p > 0$ o gęstości

$$f(x;p) = \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\Gamma(p)}, \quad x > 0.$$

Wiadomo dobrze, że rozkład gamma jest DFR, gdy $0 < p \leqslant 1$ i IFR, gdy $p \geqslant 1$.

Wniosek

Jeżeli zmienna losowa Z ma rozkład gamma z parametrem kształtu $p \geqslant 1$ i $\alpha \in (0, 1]$, to rozkład zmiennej losowej Z^α jest IFR.

Jeżeli zmienna losowa Z ma rozkład gamma z parametrem kształtu $p \in (0, 1]$ i $\alpha \in [1, \infty)$, to rozkład zmiennej losowej Z^α jest DFR.

Rozszerzymy ten wynik wykorzystując Twierdzenie (1), a także natępujący lemat (Bartoszewicz i Skolimowska, 2006).

Lemat (2)

Niech F będzie absolutnie ciągłym rozkładem i w niech będzie monotoniczną lewostronnie ciągłą funkcją wagową.

(a) Jeśli $w(x)$ jest rosnąca i $w(x)r_F(x)$ jest malejąca, to F_w jest DFR.

(b) Jeśli $w(x)$ jest malejąca i $w(x)r_F(x)$ jest rosnąca, to F_w jest IFR.

(c) Jeśli $w(x)$ jest rosnąca i $w(x)\breve{r}_F(x)$ jest malejąca, to F_w jest DRFR.

(d) Jeśli $w(x)r_F(x)$ jest malejąca, to F_w jest DRFR.

Nietrudno zauważyć, że zmienna losowa Z o rozkładzie gamma z parametrem kształtu p jest ważoną wersją zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym o gęstości $g(x) = e^{-x}$, $x > 0$, z funkcją wagową x^{p-1}.

Z drugiej strony, $X^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, ma rozkład Weibulla z parametrem kształtu α, o gestości $\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}}$.
Rozkład Weibulla jest DFR, gdy $0 < \alpha \leqslant 1$, a IFR, gdy $\alpha \geqslant 1$.

Kładąc $v(x) = x^{1/\alpha}$ i $\phi(v) = v^{\alpha(p-1)}$, z Twierdzenia (1), z Lematu (2) i ww własności rozkładów gamma i Weibulla, otrzymujemy:

Twierdzenie (2)

Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrem kształtu $p > 0$ i parametrem skali 1.

(a) Jeśli $0 < \alpha \leqslant 1$ i $0 \leqslant \alpha(p-1) \leqslant 1 - \alpha$, to rozkład zmiennej losowej $Z^{1/\alpha}$ jest DFR.

(b) Jeśli $1 \leqslant \alpha < \infty$ i $1 \leqslant \alpha p \leqslant \alpha$, to rozkład zmiennej losowej $Z^{1/\alpha}$ jest IFR.

(c) Jeśli $\alpha(p-1) < 0 < \alpha$, to rozkład zmiennej losowej $Z^{1/\alpha}$ jest DRFR.

(d) Jeśli $\alpha(p-1) < 0 < \alpha$, to rozkład zmiennej losowej $Z^{-1/\alpha}$ jest DRFR.

Przedstawione wyniki oraz inne rezultaty dotyczące zastosowania Twierdzenia (1) do badania zachowania porządków stochastycznych przez operację ważenia znajdują się w pracy:

Bartoszewicz, J., 2009, On a representation of weighted distributions. *Statistics and Probability Letters* 79, 1690-1694.

References

Bartoszewicz, J., Skolimowska, M., 2006. Preservation of classes of life distributions and stochastic orders under weighting. *Statist. Probab. Lett.* 76, 587-596.

Belzunce, F., Navarro, J., Ruiz, J.M., del Aguila, Y., 2004. Some results on residual entropy function. *Metrika* 59, 147-161.

Błażej, P., 2008. Preservation of classes of life distributions under weighting with a general weight function. *Statist. Probab. Lett.* 78, 3056-3061.

Gupta, R.C., Keating, J.P., 1986. Relations for reliability measures under length biased sampling. *Scand. J. Statist.* 13, 49-56.

Jain, K., Singh, H., Bagai, I., 1989. Relations for reliability measures of weighted distributions. *Comm. Statist. Theory Methods* 18, 4393-4412.

Misra, N., Gupta, N. Dhariyal, I.D., 2008. Preservation of some aging properties and stochastic orders by weighted distributions. *Comm. Statist. Theory Methods* 37, 627-644.

Patil, G.P., Rao, C.R., 1977. The weighted distributions: A survey and their applications. In *Applications of Statistics* (ed. P.R. Krishnaiah), 383-405. North-Holland Publ. Co. Amsterdam.

Patil, G.P., Rao, C.R., 1978. Weighted distributions and size biased sampling with applications to wild-life populations and human families. *Biometrica* 34, 179-189.

Rao, C.R., 1985. Weighted distributions arising out of methods of ascertainment: What population does a sample represent? In: *Celebration of Statistics: The ISI Centenary Volume*. Springer Verlag, New York, pp. 543-569.