XXXV Konferencja „Statystyka Matematyczna”

WISŁA 2009
7-11.XII

MODEL GOTOWOŚCI SYSTEMU TECHNICZNEGO

Karol J. ANDRZEJCZAK

karol.andrzejczak@put.poznan.pl

Politechnika Poznańska http://www.put.poznan.pl/

PROGRAM REFERATU

1. WPROWADZENIE
2. FORMALIZACJA SYSTEMU TECHNICZNEGO
3. TRÓJSTANOWY MODEL GOTOWOŚCI SYSTEMU
4. PODSUMOWANIE

1. WPROWADZENIE

1. **Przedmiot referatu:** model systemu technicznego przeznaczonego do realizacji określonych zadań w określonych warunkach eksploatacji.
2. **Cel:** Wyznaczenie gotowości systemu nie zawsze odnawianego.
3. **Przykłady systemów:** system sterowania lotami samolotów, system monitorowania elektrowni jądrowych, system sterowania misją kosmiczną.

2. FORMALIZACJA SYSTEMU TECHNICZNEGO

OZNACZENIA i ZAŁOŻENIA

1. Moduły są ponumerowanych liczbami naturalnymi 1, 2, …, n. Zbiór modułów systemu oznaczamy symbolem C, czyli $C = \{1, 2, \ldots, n\}$. Stan systemu jest jednoznacznie wyznaczony poprzez stany jego modułów.

2. Wyróżnione stany:

s_1 stan zdatności – system spełnia wszystkie nałożone na niego wymagania użytkowe.

s_2 stan niezdatności odwracalnej – system jest odnawiany.

3. Nowy system, czyli taki, którego wszystkie moduły są również nowe, rozpoczyna działanie w chwili $t = 0$.
   a. W_{ij} i D_{ij} oznaczają odpowiednio losowe czasy j-tego okresu zdatności i niezdatności dla i-tego modułu.
   b. $W_1, D_1, W_2, D_2, \ldots,$ losowe czasy zdatności systemu
4. Gotowość modułu i systemu

$$A_i(t) = \mathrm{P}(X_i(t) = 1),$$

$$A(t) = \mathrm{P}(\varphi(X_1(t), \ldots, X_n(t)) = 1) \qquad (1)$$

Prosty strumień odnowy jest podstawą konstrukcji następujących charakterystyk i-tego modułu: $MTBF_i$, $MTTF_i$, $MTTR_i$, $m_{f,i}(\infty)$.

Dystrybuanta $H_i(t)$ czasu trwania jednego cyklu, tj. sumy

$$W_i + D_i$$

jest splotem

$$H_i(t) = F_i * G_i(t) \tag{2}$$

$F_i(t)$ i $G_i(t)$ oznaczają dystrybuanty czasu zdatności i czasu odnowy i-tego modułu.

Jeżeli

$M(t)$ jest funkcją odnowy, tj. oczekiwaną liczbą odnów w przedziale [0, t],

to

$$A_i(t) = \overline{F}_i(t) + M_i * \overline{F}_i(t) \tag{3}$$

3. TRÓJSTANOWY MODEL GOTOWOŚCI SYSTEMU

Wyróżnione stany:

s_1 stan zdatności – system (moduł) spełnia wszystkie nałożone na niego wymagania użytkowe.

s_2 stan niezdatności odwracalnej – system (moduł) jest odnawiany.

s_3 stan niezdatności fatalnej – system (moduł) nie jest odnawiany.

Stan i-tego modułu ($i \in C$) w chwili t określa proces

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy moduł w chwili } t \text{ jest w stanie } s_1, \\ 2, & \text{gdy moduł w chwili } t \text{ jest w stanie } s_2, \\ 3, & \text{gdy moduł w chwili } t \text{ jest w stanie } s_3. \end{cases} \tag{4}$$

Stan systemu odnawialnego w chwili t określa proces

$$\varphi(X_1(t), \ldots, X_n(t)) = \begin{cases} 1, & \text{gdy system w chwili } t \text{ jest w stanie } s_1, \\ 2, & \text{gdy system w chwili } t \text{ jest w stanie } s_2, \\ 3, & \text{gdy system w chwili } t \text{ jest w stanie } s_3. \end{cases} \tag{5}$$

Zakładamy, że $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ są wzajemnie niezależne.

System z zabezpieczeniem – system z nadmiarowością diagnostyczno-usprawniającą.

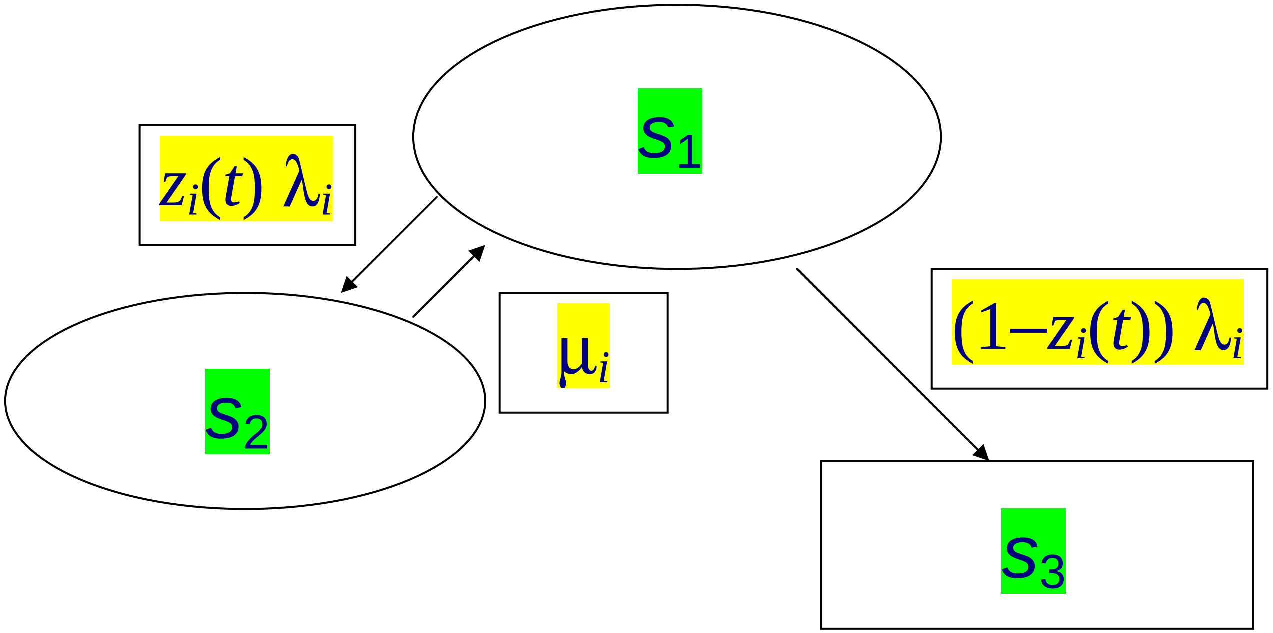
Zwiększanie zabezpieczenia podnosi koszty systemu

– problem wyznaczania optymalnego poziomu nadmiarowości związanej z jego zabezpieczeniem.

Stopień zabezpieczenia *i*-tego modułu systemu w chwili *t* określa wskaźnik zabezpieczenia $z_i(t)$ ($i \in C$).

Wskaźnikiem zabezpieczenia *i*-tego modułu w chwili *t* nazywamy prawdop. zdarzenia, że moduł ten po utracie zdatności przejdzie do stanu s_2, w którym poddany zostanie działaniom odnawiającym.

Proces zmiany stanu modułu z zabezpieczeniem można opisać markowskim modelem przejść.



Rys. 1. Markowski model przejść

gdzie λ_i i μ_i są intensywnościami uszkodzenia i odnowy, natomiast $z_i(t)$ jest wsp. zabezpieczenia *i*-tego modułu.

Niech

$$S_{ij}(t) = \mathrm{P}(X_i(t) = j),\ i \in C,\ j = 1, 2, 3,$$

wówczas rozkład stanów i-tego modułu w chwili t:

$$S_{i1}(t) = \frac{\mu_i - \beta_{i1}}{\beta_{i2} - \beta_{i1}} \exp(-\beta_{i1} t) + \frac{\mu_i - \beta_{i2}}{\beta_{i1} - \beta_{i2}} \exp(-\beta_{i2} t);$$

$$S_{i2}(t) = \frac{\lambda_i z_i(t)}{\beta_{i2} - \beta_{i1}} \exp(-\beta_{i1} t) + \frac{\lambda_i z_i(t)}{\beta_{i1} - \beta_{i2}} \exp(-\beta_{i2} t); \qquad (6)$$

$$S_{i3}(t) = 1 - S_{i1}(t) - S_{i2}(t);$$

gdzie

$$\beta_{i1}, \beta_{i2} = \frac{1}{2}\left(\lambda_i + \mu_i \mp \sqrt{(\lambda_i + \mu_i)^2 - 4(1 - z_i(t))\lambda_i \mu_i}\right).$$

Szczególne przypadki:

Jeżeli dla $t \geq 0$ jest $z_i(t) = 1$, to moduł jest cały czas w pełni zabezpieczony, tj. po każdej utracie zdatności można go odnowić.

Jeżeli $z_i(t) = 0$, to każde uszkodzenie modułu jest fatalne.

Warunkowa gotowość *i*-tego modułu, przy warunku, że moduł ten nie przejdzie do stanu fatalnego:

$$A_i(t) = \frac{S_{i1}(t)}{S_{i1}(t) + S_{i2}(t)} \tag{7}$$

Prawdop., że w chwili t żaden moduł systemu nie będzie w stanie fatalnym wyraża się wzorem:

$$P_u(t) = \prod_{i \in C} (S_{i1}(t) + S_{i2}(t)) \tag{8}$$

Ogólniejszy przypadek

Jeżeli rozkłady czasu zdatności modułów nie są wykładnicze,

to otrzymamy semi-markowski model.

Wówczas prawdop. przebywania w stanie zdatności

$$S_{i1}(t) = \overline{F_i}(t) + z_i(t)(F_i * G_i * \overline{F_i}(t)) + (z_i(t))^2 (F_i^{(2)} * G_i^{(2)} * \overline{F_i}(t)) + \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z_i(t))^m (F_i^{(m)} * G_i^{(m)} * \overline{F_i}(t))$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z_i(t))^m (F_i^{(m)} * G_i^{(m)}(t) - F_i^{(m+1)} * G_i^{(m)}(t)) \qquad (9)$$

gdzie

$F^{(0)} = G^{(0)} \equiv 1$, $F^{(n)}(t)$ jest n-krotnym splotem F ze sobą.

Prawdop. przebywania w odnawialnym stanie niezdatności

$$S_{i2}(t) = z_i(t)(F_i * \overline{G}_i(t)) + (z_i(t))^2 (F_i^{(2)} * G_i^{(1)} * \overline{G}_i(t)) + \ldots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (z_i(t))^m (F_i^{(m)} * G_i^{(m-1)} * \overline{G}_i(t))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (z_i(t))^m (F_i^{(m)} * G_i^{(m-1)}(t) - F_i^{(m)} * G_i^{(m)}(t)) \qquad (10)$$

4. Podsumowanie

W konstrukcji modelu gotowości systemu zastosowano funkcyjne wskaźniki $z_i(t)$, $i \in C$ zabezpieczenia modułów.

Wskaźniki zabezpieczenia są f. rzeczywistymi o wartościach rzeczywistych z przedziału [0, 1]. Są one miarami zaufania do przywrócenia zdatności systemu (modułów).

Jest to więc ujęcie dynamiczne, które uwzględnia możliwości uczenia się systemu.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ