Niezmienniczość regresji form kwadratowych i algebry Jordana

Jacek Wesołowski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych,
Politechnika Warszawska,
Plac Politechniki 1, 00-661 Warszawa,
e-mail: wesolo@mini.pw.edu.pl

Klasyczne twierdzenie charakteryzacyjne Lukacsa mówi, że niezależne, nieujemne zmienne losowe X i Y, dla których $X+Y$ i $X/(X+Y)$ też są niezależne, muszą mieć rozkłady gamma z tym samym parametrem skali. Istnieje spora literatura związana z tą charakteryzacją, w szczególności dotycząca wersji regresyjnych twierdzenia Lukacsa. Letac i Massam (1998) podali charakteryzację rozkładu Wisharta (który jest odpowiednikiem rozkładu gamma na stożkach symetrycznych, w szczególności na stożku macierzy symetrycznych dodatnio określonych) za pomocą warunków typu kwadratowej regresji. W pracy Letac, Wesołowski (2008) opisaliśmy rozkłady niezależnych wektorów losowych w R^n, dla których $E(X|X+Y) = a(X+Y)$ oraz $E(q(X)|X+Y) = bq(X+Y)$ dla liczb a i b oraz wszystkich form kwadratowych q z podprzestrzeni $\mathcal{Q}_v$ form kwadratowych ortogonalnych do (dowolnej ustalonej) formy kwadratowej v. To pozwoliło na naturalne uogólnienie rozkładów Wisharta na stożku Lorentza. W naszej najnowszej pracy, Letac, Wesołowski (2009), podobnie rozważamy niezależne zmienne losowe X i Y przyjmujące wartości w R^n, dla których istnieje liczba $a \in R$ taka, że $E(X|X+Y) = a(X+Y)$. Niech $\mathcal{Q}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{Q}_k$ będzie dowolnym przedstawieniem w postaci sumy prostej, przestrzeni $\mathcal{Q}$ wszystkich form kwadratowych na R^n. Okazuje się, że jeśli istnieją liczby $b_1, \ldots, b_k$ takie, że $E(q(X)|X+Y) = b_i q(X+Y)$ dla dowolnej formy $q \in \mathcal{Q}_i$, $i = 1, \ldots, k$, to $k = 2$ oraz w R^n można wtedy wprowadzić strukturę euklidesowej algebry Jordana, w taki sposób, że rozkłady X i Y są rozkładami Wisharta na stożkach symetrycznych związanych z odpowiednią algebrą Jordana. Co więcej, udało się dość dokładnie zbadać strukturę algebraiczną przestrzeni $\mathcal{Q}_1$ i $\mathcal{Q}_2$, a dokładniej izomorficznych z $\mathcal{Q}_1$ i $\mathcal{Q}_2$ przestrzeni symetrycznych operatorów liniowych na odpowiednich algebrach Jordana.

Literatura

[1] Letac, G., Massam, H., *Quadratic and inverse regressions for Wishart distributions,* Ann. Statist. 26 (3), pp.573-595, 1998

[2] Letac, G., Wesołowski, J., *Laplace transforms which are negative powers of quadratic polynomials,* Trans. Amer. Math. Soc. 360, pp.6475-6496, 2008

[3] Letac, G., Wesołowski, J., *Why Jordan algebras are natural in statistics: quadratic regression implies Wishart distribution,* Bull. Soc. Math. France, 2009 - przyjęta do druku