O estymacji przedziałowej funkcji dyfuzji metodami repróbkowania

Paweł Teisseyre

Instytut Podstaw Informatyki PAN
e-mail: teisseyrep@ipipan.waw.pl

Rozważmy zmienne losowe $X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$ spełniające dla pewnego $\Delta > 0$ równanie

$$X_{(i+1)\Delta} - X_{i\Delta} = \mu(X_{i\Delta})\Delta + \sigma(X_{i\Delta})\sqrt{\Delta}\varepsilon_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

gdzie $\varepsilon_i, 1 = 2, \ldots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$, $X_0 = 0$, a funkcje $\mu(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ są funkcjami dryfu i dyfuzji odpowiednio. Dla małych Δ, $X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$ jest przybliżeniem trajektorii procesu Itô

$$dX_t = \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

gdzie W_t to proces Wienera określony na przedziale $[0, \infty)$, $W_0 = 0$. Estymator Stantona (1997) funkcji dyfuzji ma postać

$$\hat{\sigma}^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{i\Delta}^2 K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)},$$

gdzie $Z_{i\Delta} = \Delta^{-1/2}(X_{(i+1)\Delta} - X_{i\Delta})$, $K_h(u) = h^{-1}K(u/h)$, $K(\cdot)$ jest gęstością rozkładu $N(0,1)$, a h parametrem wygładzającym. W referacie zostanie przedstawiona konstrukcja punktowych przedziałów ufności dla funkcji dyfuzji w oparciu o estymator Stantona i estymator lokalnie liniowy przy użyciu metod repróbkowania. Omówione zostaną trzy schematy. W pierwszym z nich (pair bootstrap) generowany jest ciąg postaci

$$\{(X_{N_i\Delta}, Z_{N_i\Delta}), i = 1, \ldots, n-1\}, \tag{2}$$

gdzie $N_1, \ldots, N_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $\{1, \ldots, n-1\}$. W schemacie autoregresyjnym trajektoria opisana jest równaniem:

$$X^*_{(i+1)\Delta} = \Delta\bar{\mu}(X^*_{i\Delta}) + X^*_{i\Delta} + \bar{\sigma}(X^*_{i\Delta})\varepsilon^*_{i+1}\sqrt{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n-1\,, \tag{3}$$

gdzie $X^*_\Delta = X_\Delta$, $\bar{\mu}(\cdot)$ oraz $\bar{\sigma}(\cdot)$ są pewnymi estymatorami funkcji dryfu i dyfuzji, natomiast $\{\varepsilon^*_i, i = 2, \ldots, n\}$ próbą losową o rozkładzie $N(0,1)$. W schemacie podpróbkowania z oryginalnej próby bloki długości b, postaci $(X_{i\Delta}, \ldots, X_{(i+b-1)\Delta})$ (dla $i = 1, \ldots, n-b+1$) traktowane są jako pseudopróby otrzymane z próby wyjściowej.

Wyniki przedstawione w referacie uzyskano wspólnie z J. Mielniczukiem.

Literatura

[1] Fan, J., *A Selective Overview of Nonparametric Methods in Financial Econometrics,* Statistical Science, Vol. 20, No. 4, pp. 317-337, 2005

[2] Franke, J., Kreiss, J., P., Mammen, E., *Bootstrap of kernel smoothing in nonlinear time series,* Bernoulli, Vol. 8, No. 1, pp. 1-37, 2002

[3] Stanton, R., *A nonparametric model of a term structure dynamics and the market price of interest rate risk,* Journal of Finance, 52, pp. 1973-2002, 1997